線形代数 I (担当 松下勝義)

教科書 §2.3-2.4, pp.13–26

II. 行列の階数と階段行列, 連立方程式の解

講義ノート

もし以下の連立一次方程式,

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_1 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_1 \end{cases} \tag{69}$$

の解が一つに定まるとする．一回目の講義で分かったように, その拡大係数行列,

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix} \tag{70}$$

の係数行列 $\hat{A}$ を行基本変形

行基本変形

1. 1 つの行に 0 でない定数を掛ける
2. 1 つの行の定数倍を他の行に掛ける
3. 2 つの行を入れ替える

を用いて

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{71}$$

の形に直すことで

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{I} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \tag{72}$$

の $\boldsymbol{d}$ から解を得ることができた.

ところが教科書にもあるように連立一次方程式は解が一つに定まるとは限らない．場合によっては解が ∞ 個ある場合や, 解がない場合が存在する．これらの場合でも係数行列 $\hat{A}$ は階段行列に行基本変形で一意に変形できる．そしてそれを利用し解が存在するかどうかを知ることができる．今回はこれらの場合の行列による解の存在の判定法を述べる．

- 階段行列
  次のような行列を階段行列と呼ぶ.

階段行列

ピボットという値が 1 の成分が存在しそれが以下の条件を満たす.

1. ピボットがない行のすべての成分は 0
2. ピボットより左にある成分はすべて 0
3. ピボットのある列の列番号を p_i としピボットを含む行の数を r ($< m$ で m は行列の行の数) とすると
$$p_1 < p_2 < \cdots < p_{r-1} < p_r. \tag{73}$$
4. 各ピボットを含む列ベクトルの成分はピボット以外で 0.

  – 階段行列の例 1 (単位行列)
$$\hat{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{74}$$

  – 階段行列の例 2
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{75}$$

  – 階段行列ではない例
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{76}$$

- 基本変形による階段行列への変形と階数
  行列 $\hat{A}$ は行基本変形で階段行列 $\hat{B}$ に変形できる. このとき階段行列のピボットの数 r を $\mathrm{rank}(\hat{A})$ もしくは $r(\hat{A})$ と書き行列の階数と呼ぶ.

行列の階数

$$r(\hat{A}) = \hat{A}\text{のピボットの数} \tag{77}$$

- 拡大係数行列の係数行列 $\hat{A}$ の列数 n と階数 r に対して以下が成り立つ.

連立一次方程式の科の存在の判定

行基本変形で係数行列が階段行列 $\hat{B}$ とベクトル $\boldsymbol{d}$ からなる拡大係数行列へ変形できたとする.

$$\begin{pmatrix}\hat{A} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\hat{B} & \boldsymbol{d}\end{pmatrix} \tag{78}$$

そのとき,

- $d_{r+1} = \ldots\ d_n = 0$ ではない. $\Rightarrow$　解なし
- $d_{r+1} = \ldots\ d_n = 0$ かつ $r{=}n$ 解が一つ存在する.
- $d_{r+1} = \ldots\ d_n = 0$ かつ $r < n$ 解が ∞ 個あり未定定数 $n - r$ 個で書ける.

となる.

- 解が一意に定まる場合 (例題 2.4(1))
  連立一次方程式

$$\begin{cases} x & -2y & -3z & = & 4 \\ 2x & +3y & +4z & = & 4 \\ 3x & -4y & -7z & = & 10 \end{cases} \tag{79}$$

拡大係数行列の係数行列を行基本変形で階段行列へ変形する.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \tag{80}$$

この場合階段行列は単位行列 $\hat{I}_3$ になり, $\boldsymbol{d}$ の 0 ではない成分の数は 3, r も階数 (ピボット数) が 3 であり d_4 等はなく 0 とみなしてよい. 列の数 3 であるから解が一意であることがわかる.

- 解が無限に存在する場合 (例題 2.4(2))

$$\begin{cases} x & -2y & -3z & = & 4 \\ 2x & +3y & +z & = & 1 \\ 3x & -4y & -7z & = & 10 \end{cases} \tag{81}$$

拡大係数行列の係数行列を行基本変形で階段行列へ変形する.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \overset{②_{-2}①}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \tag{82}$$

$$\overset{③_{-3}①}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \tag{83}$$

$$\overset{②/7}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \tag{84}$$

$$\overset{③_{-2}②}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{85}$$

$$\overset{①_{+2}②}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{C} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \tag{86}$$

となる. $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \dots)$ より $d_i \neq 0$ である d_i は d_1 と d_2 の二つであり, この数は階数 (ピボットの数)$r = 2$ と一致している. よってこの連立一次方程式には解が存在する.

この場合は変数の数 (係数行列の列数)n が 3 で, 一つの変数が定まらず解が ∞ 個あることが分かる. 従って, 未知定数 c 一つで解を書くことができる. $z = c$ として連立一次方程式を変形後の拡大係数行列で書けば,

$$\hat{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} \tag{87}$$

であり, $z = c$ を使うと,

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{88}$$

より

$$\begin{cases} x - c = 2 \\ y + c = -1 \end{cases} \tag{89}$$

となる. よって解は

$$\begin{cases} x = 2 + c \\ y = -1 - c \\ z = c \end{cases} \tag{90}$$

である.

- 解が存在しない場合 (例題 2.4(3))

$$\begin{cases} x & -2y & -3z & = & 4 \\ 2x & +3y & +z & = & 4 \\ 3x & -4y & -7z & = & 10 \end{cases} \tag{91}$$

拡大係数行列の係数行列を行基本変形で階段行列へ変形する.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \overset{②_{-2}①}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -4 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \tag{92}$$

$$\overset{②_{-3}①}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \tag{93}$$

$$\overset{③_{/2}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{94}$$

$$\overset{②_{\Leftrightarrow}③}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 7 & -4 \end{pmatrix} \tag{95}$$

$$\overset{③_{-7}②}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{96}$$

$$\overset{①_{+2}②}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{97}$$

より $d_n \neq 0$ の数が 3 で階数 (ピボットの数)$r = 2$ より大きい. そのため解はない. 実際, 解として (x, y, z) が存在するとすると,

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{98}$$

より

$$\begin{cases} x - z = 2 \\ y + z = -1 \\ 0 = 3 \end{cases} \tag{99}$$

となるため最後の式が矛盾してしまう.