線形代数 II 第四回 (担当 松下勝義)

7-1. (10分, p. 135)

1. 線形変換の定義 (p.135)

線形変換

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とスカラー k に対して,

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b}) \tag{130}$$

$$f(k\boldsymbol{a}) = kf(\boldsymbol{a}) \tag{131}$$

を満たす関数 f を**線形変換**と呼ぶ.
上の条件を**加法性**, 下の条件を**斉次性**と呼ぶ.
また上記の二つの性質全体を**線形性**と呼ぶ.

このようなベクトルの線形変換は基底を用いて表すことができる. 基底を $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ としたとき, 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ の変換はこの基底の変換で書ける.

基底の線形変換によるベクトルの線形変換

任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ の線形変換 $f(\boldsymbol{v})$ は, 基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の線形変換 $f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2)$ を使って

$$f(v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2) = v_1 f(\boldsymbol{e}_1) + v_2 f(\boldsymbol{e}_2) \tag{132}$$

と書ける.

例 1
基底を以下の標準基底

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{133}$$

とする. それぞれの基底ベクトルの線形変換が,

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_1) & = f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_2 \\ f(\boldsymbol{e}_2) & = f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{e}_1 \end{cases} \tag{134}$$

であったとき,
ベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$

$$f(\boldsymbol{v}) = v_1\boldsymbol{e}_2 - v_2\boldsymbol{e}_1 = -v_2\boldsymbol{e}_1 + v_1\boldsymbol{e}_2 \tag{135}$$

と変換される. だから線形変換 f は座標 (v_1, v_2) を $(v_2, -v_1)$ へ移す.

例えばベクトル $\boldsymbol{v}$ の標準基底での座標 $\boldsymbol{v} = (2, 3)$ を考えると,

$$
\begin{aligned}
f(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) \leftrightarrow f(2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2) &= 2f(\boldsymbol{e}_1) + 3f(\boldsymbol{e}_2) &(136)\\
&= 2\boldsymbol{e}_2 + 3(-\boldsymbol{e}_1) &(137)\\
&= -3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 &(138)
\end{aligned}
$$

より,

$$
f(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{139}
$$

2. 線形変換による正規直交基底の変換による表現 (表現行列)

表現行列

正規直交規定, $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に対して, 線形変換 f が任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ の座標 (v_1, v_2) を

$$
f(\boldsymbol{v}) \leftrightarrow v_1 f(\boldsymbol{e}_1) + v_2 f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{140}
$$

と変換するとき, 行列

$$
\hat{F} = \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix} \tag{141}
$$

を線形変換 f の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ での表現行列と呼ぶ.

正規直交規定を

$$
\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{142}
$$

とする. このとき例 1 の線形変換 f は,

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{e}_1) &= \boldsymbol{e}_2 = 0 \times \boldsymbol{e}_1 + 1 \times \boldsymbol{e}_2 &(143)\\
f(\boldsymbol{e}_2) &= -\boldsymbol{e}_1 = -1 \times \boldsymbol{e}_1 + 0 \times \boldsymbol{e}_2 &(144)
\end{aligned}
$$

であったが, これを行列で表すと

$$
\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \hat{F} \tag{145}
$$

となる. この行列 $\hat{F}$ は例 1 の線形変換 f の表現行列である.

3. 線形変換による座標変換

線形変換による座標変換

任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ の線形変換 $f\boldsymbol{v})$ は f の行現行列を用いて,

$$f(\boldsymbol{v}) = \hat{F}\boldsymbol{v} \tag{146}$$

と書ける.

例 1 のベクトル $\boldsymbol{v}$ の座標については

$$f(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \hat{F}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{147}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{148}$$

となり先の線形変換による座標の変換が再現される.

4. 回転変換

線形変換の代表例として回転変換がある.

二次元回転変換

二次元の θ 回転の変換行列 $\hat{R}(\theta)$ は

$$\hat{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{と書ける.} \tag{149}$$

例えば, 90 度回転を表す表現行列は,

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \tag{150}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{151}$$

7-2. 線形写像の合成 (10 分, p. 138)

1. 写像の合成 (定理 7.2)

線形写像の合成

f, g を線形写像とする．写像の合成

$$(f \circ g)\boldsymbol{v} = f(g(\boldsymbol{v})) \tag{152}$$

を考える．f の表現行列 $\hat{F}$, g の表現行列 $\hat{G}$ とするとき, $(f \circ g)$ の表現行列 は

$$\hat{F}\hat{G} \tag{153}$$

と表現行列のかけ算になる．

一般には $\hat{F}\hat{G} \neq \hat{G}\hat{F}$ より

$$(f \circ g) \neq (g \circ f) \tag{154}$$

今写像 g として, 標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ に対して

$$\begin{cases} g(\boldsymbol{e}_1) & = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \\ g(\boldsymbol{e}_2) & = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \end{cases} \tag{155}$$

とするとき, その行現行列は

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{156}$$

である．このとき, $f \circ g$ の表現行列は,

$$\hat{F}\hat{G} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{157}$$

7-3. 逆写像 (10 分, p. 139)

1. 逆写像と表現行列 (定理 7.3)

逆写像の表現行列

線形変換 f の逆変換 f^{-1} を考えると,

$$(f \circ f^{-1})\boldsymbol{v} = (f^{-1} \circ f)\boldsymbol{v} = \mathrm{id}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \tag{158}$$

が成り立つ. 写像の合成から f^{-1} の表現行列を $\hat{\hat{F}}$ とするとき,

$$\hat{F}\hat{\hat{F}} = \hat{\hat{F}}\hat{F} = \hat{I} \tag{159}$$

であることが分かる. つまり, 逆写像 f^{-1} の表現行列 $\hat{\hat{F}}$ は $\hat{F}$ の逆行列 $\hat{F}^{-1}$ となる.

例 1 の場合

$$\hat{F}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{160}$$

$$\hat{F}^{-1}\hat{F} = \hat{I}_2 \tag{161}$$

7-4. 基底の変換 (10 分, p. 139)

表現行列の基底の変換

表現行列 $\hat{F}$ は既定の変換,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \hat{P} \tag{162}$$

に対して,

$$\hat{F}' = \hat{P}^{-1}\hat{F}\hat{P} \tag{163}$$

と変換される.

1. 基底の変換の例 (定理 7.4) 例 1 の f を別の基底で書く

$$\boldsymbol{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{164}$$

このとき

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1{}' & \boldsymbol{e}_2{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \hat{P} \tag{165}$$

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{166}$$

$$f(\boldsymbol{v}) = f(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \hat{F} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{167}$$

基底を変換すると座標は

$$\hat{P}^{-1}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' \tag{168}$$

と変換されることから,

$$f(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_2 \end{pmatrix} \hat{P}^{-1}\hat{F}\hat{P} \left(\hat{P}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) \quad = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_2 \end{pmatrix} \hat{F}'\boldsymbol{v}' \tag{169}$$

従って, 基底の変換で,

$$\begin{aligned} \hat{F} \to F' &= \hat{P}^{-1}\hat{F}\hat{P} && (170) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} && (171) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} && (172) \end{aligned}$$