線形代数 II 第三回 (担当 松下勝義)

初めに基底の取り方の任意性, (辞書を英語にするかドイツ語にするか？).
英語にした方が便利なことが多い.
おなじように便利な規定として正規直交系があることを説明する.

6-2-2. 基底の取り換え (10 分, p. 110)

1. 基底の取り換え (p.111, 定理 6.5, 例示)

基底の取り換え

部分空間 W の二つの基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ と $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m\}$ に対して, 正則行列 $\hat{P}$ が存在し,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} \hat{P} \tag{84}$$

と書ける.

二行に列で一般論を説明する. 二つの基底は互いに線形関係で結ばれるから,

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = p_{11}\boldsymbol{a}_1 + p_{12}\boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{b}_2 = p_{21}\boldsymbol{a}_1 + p_{22}\boldsymbol{a}_2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \tag{85}$$

$$A : \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{86}$$

$$B : \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{87}$$

$$\tag{88}$$

このとき実際に

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \tag{89}$$

として二つの式を書き下し,

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}, \tag{90}$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} \tag{91}$$

以下を示す.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{92}$$

2. 二つの基底で張られる部分空間の等価性

$$\left\langle \boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{b}_1 \quad \boldsymbol{b}_2 \right\rangle \tag{93}$$

は $\hat{P}$ が正則であれば成り立つ.

6-4. 正規直交規定 (10 分, p. 116)

1. 数ベクトルの内積と長さ, 単位ベクトル (p.117) 空間、平面ベクトルと同じ！

単位ベクトルと直交

- $\|\boldsymbol{a}\| = 1 \Rightarrow \boldsymbol{a}$ は単位ベクトル.
- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交.

2. 直交ベクトルの一次独立性 (p.119, 定理 6.10)

直交ベクトルの一次独立性

互いに直交するベクトルは一次独立

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0} \tag{94}$$

とする

$$0 = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}_1) = ((k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_1), \boldsymbol{a}_1) = k_1 \tag{95}$$
$$0 = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}_2) = ((k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2), \boldsymbol{a}_2) = k_2 \tag{96}$$

3. 正規直交基底の定義 (p.119, 例示)

正規直交基底

基底のベクトルが次の二つを満たす.

- 単位ベクトル.
- 互いに直交.

例 B

4. 定理 6.11 (p. 120)

正規直交基底での座標

あるベクトル $\boldsymbol{c}$ を正規直交基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \boldsymbol{a}_m\}$ で表すと,

$$\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_2 + \cdots + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{a}_m \tag{97}$$

このとき内積 $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_1)$ は後で述べるように $\boldsymbol{c}$ の $\boldsymbol{a}_1$ への正射影である.

つまり座標は内積と一致する.
直行基底の便利さ=「成分の計算が内積でできて簡単!」.

例: 正規直交基底への射影での座標の求め方次のベクトルを考える

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{98}$$

座標を求めるためには連立一次方程式

$$\boldsymbol{c} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 \tag{99}$$

を解いて k_1 と k_2 を決める。　ベクトルの字数が大きい場合計算コストが大きい. 直交している基底 B. 計算の過程で $||\boldsymbol{b}_1|| = 1$, $||\boldsymbol{b}_2|| = 1$ はさらに計算を簡単化した。
基底は長さ 1 で互いに直交しているものが係数を計算するときに速い!

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{100}$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{101}$$

の場合,

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_1) &= k_1(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) + k_2(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) && (102) \\ &= k_1 && (103) \\ & && (104) \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} k_1 = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_1) &= 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + (-2) \times \frac{1}{\sqrt{2}} && (105) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} && (106) \end{aligned}$$

同じように，

$$k_2 = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_2) = 1 \times -\frac{1}{\sqrt{2}} + (-2) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{107}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{2}} \tag{108}$$

より求める座標は $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})$.

正射影

ベクトル $\boldsymbol{c}$ のべくトル $\boldsymbol{a}_1$ の向きの射影，

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{||a_1||} \tag{109}$$

$$\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{u}_1)\, \boldsymbol{u}_1 = ||c|| \cos(\theta) \boldsymbol{u}_1 \tag{110}$$

とする．これを $\boldsymbol{c}$ の $\boldsymbol{a}$ の向きへの正射影と呼ぶ (図示)

5. シュミットの直交化法 (p120-123)
適当な規定に対して，正規直交系を作りたい
三次元空間中の斜めの平面上の正規直交基底がほしいなど．基底 $\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n$ が与えられたとき正規直交規定は以下のようなプロセスで作る．

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{b}_1 \tag{111}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{||\boldsymbol{v}_1||} \tag{112}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{b}_2 - (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 \tag{113}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{||\boldsymbol{v}_2||} \tag{114}$$

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = 0 \tag{115}$$

$$||u_1|| = ||u_2|| = 1 \tag{116}$$

$$\tag{117}$$

- 例題 (6.11): やらない
- 例: 図示しながら解説

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{118}$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{119}$$