

線形代数 II (担当 松下勝義)

演習問題 4. (線形変換と行列表現)

- 演習問題 4-1. \mathbb{R}^2 の標準基底を

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (138)$$

とする. 線形変換 $f(\mathbf{x})$ を

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1, \quad (139)$$

$$f(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \quad (140)$$

- (1) $f(\mathbf{x})$ の表現行列 \hat{A} を答えよ.
- (2) 標準基底上の座標 $\mathbf{a}=(2,2)$ の $f(\mathbf{x})$ での変換先を与え, 図示せよ.

- 演習問題 4-2. \mathbb{R}^2 の以下の基底 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

で表された線形変換

$$f_a(\mathbf{a}_1) = \mathbf{a}_2, \quad (141)$$

$$f_a(\mathbf{a}_2) = -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 \quad (142)$$

に対して以下の問いに答えよ.

- (1) $f_a(\mathbf{x})$ の基底 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ での表現行列 \hat{A}_a を与えよ.
- (2) $2\mathbf{a}_1$ の座標の $f_a(\mathbf{x})$ による変換先を与え, その後, 変換された座標を標準基底の座標に直して図示せよ.
- (3) 基底 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ と標準基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ が

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \hat{P} \quad (143)$$

と表されるとき \hat{P} を与えよ.

- (4) \mathbf{a}_1 と \mathbf{a}_2 を \mathbf{e}_1 と \mathbf{e}_2 を用いて表せ.
- (5) $f_a(\mathbf{x})$ の標準基底での線形変換 $f_e(\mathbf{e}_1), f_e(\mathbf{e}_2)$ を与えよ.
- (6) 標準基底を用いた表現行列 \hat{A} が \hat{A}_a と \hat{P} を用いて

$$\hat{A} = \hat{P}\hat{A}_a\hat{P}^{-1} \quad (144)$$

と表せるか確かめよ.