線形代数 II (担当 松下勝義)

演習 1. (平面ベクトルと空間ベクトル)

- 演習問題 1-1.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

  としたとき,

  - (1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のそれぞれの長さを計算せよ.
  - (2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を計算せよ.
  - (3) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積を計算し, 図示せよ.
  - (4) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ の内積を計算せよ. (ヒント:$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ を使う.)
  - (5) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ の外積を計算せよ. (ヒント:$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ を使う.)
  - (6) $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の成す角を求めよ.
  - (7) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ の成す平行六面体の体積を求めよ.

- 演習問題 1-2. 空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とその成す角を θ とする. そのとき余弦定理

$$\boldsymbol{c}^2 = ||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 - 2||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}|| \cos(\theta)$$

  が成立する. ただし, $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る三角形のもう一つの辺のベクトル $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ である. この定理を使って

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}|| \cos(\theta)$$

  と書けることを示せ.

- 演習問題 1-3. 空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} ||a|| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} ||b|| \cos\theta \\ ||b|| \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

  とする. このとき, 外積

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

の大きさが

$$||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|| = ||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}|| \sin(\theta)$$

と書け, θ が $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成す角であることを示せ. ただし演習問題 1-2 の公式 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}|| \cos(\theta)$ を使ってよい.