ベクトルと行列 1 (担当 松下勝義)

1-III. 行列の演算

1-III-0 行列による連立一次方程式の表現

前回も述べたようにこの授業では連立一次方程式,

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

を考える. この連立一次方程式は左辺の未知変数 x, y がつくるベクトル,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2}$$

と右辺の値, b_1 と b_2 が作るベクトル,

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

, 並びに, 行列 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{4}$$

を用いて,

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{5}$$

と表現できる.

このベクトルと行列の表現法の左辺には行列 $\hat{A}$ とベクトルの積が現れる. 連立一次方程式の解を変えないような行列に演算を定義すると, 係数を変形して解を求めるのに有用である. このような行列の演算をまず学ぶのが本日の目標である.

ここで行列を表現するため, $\hat{A}$ のように^がついている大文字を行列とする. 今後^がついているものについては行列と考えてよい. ここで述べた行列は横列が 2, 縦列が 2 つある. 一般にはこれらはそれぞれある整数個存在し, この講義ではよく筆記体の文字で m, n と表す. 行列の横列を行, 縦列を列と慣習的に呼ぶ. 行列が m 個行を持ち, n 個列を持っていれば m 行 n 列行列と呼ぶ. もし, 行の数と列の数が同じ m であれば m 次正方行列と呼ぶ. 行列 $\hat{A}$ の i 行目の行が作るベクトルは i 行ベクトル, j 列が作る横向きのベクトルは j 列ベクトルと呼ぶ. これらは $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{c}_j$ と書くことがある. i 行, j 列にある数値をよく a_{ij} と表し, ij 成分と呼ぶ. これらの呼び名などは慣習的な物なので必ず覚えておくこと.

1-III-1 行列とベクトルの積

n 個の未知変数の組 $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$ に対する m 個の連立一次方程式,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

を考える．　この左辺

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \tag{6}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \tag{7}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n \tag{8}$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \tag{9}$$

を m 行 n 列行列 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{10}$$

と n 次数の列ベクトル $\boldsymbol{x}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \tag{11}$$

で積 $\hat{A}\boldsymbol{x}$ として表現したい．

連立一次方程式が行列とベクトルの積に一致するという条件から積を以下のように決めればよいことになる．

行列のベクトルへの積

n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ への n 行 m 列行列 $\hat{A}$ の積を以下のように定義する.

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \times x_1 + a_{12} \times x_2 + \ldots + a_{1n} \times x_n \\ a_{21} \times x_1 + a_{22} \times x_2 + \ldots + a_{2n} \times x_n \\ \vdots \\ a_{m1} \times x_1 + a_{m2} \times x_2 + \ldots + a_{mn} \times x_n \end{pmatrix} \tag{13}$$

- 例 1
  行列 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \tag{14}$$

とベクトル $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{15}$$

の積

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times x + -2 \times y + -3 \times z \\ 2 \times x + 3 \times y + 4 \times z \\ 3 \times x + -4 \times y + -7 \times z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y - 3z \\ 2x + 3y + 4z \\ 3x - 4y - 7z \end{pmatrix} \tag{16}$$

- 例 2 係数行列 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \tag{17}$$

とベクトル $\boldsymbol{c}$

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

の積

$$\hat{A}\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + -2\times 2 + -3\times -1 \\ 2\times 1 + 3\times 2 + 4\times -1 \\ 3\times 1 + -4\times 2 + -7\times -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \tag{19}$$

- 例 3 行列を用いた方程式　$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える．ただし $\boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} \tag{20}$$

とする．このとき, 式 (16) より

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x - 2y - 3z \\ 2x + 3y + 1z \\ 3x - 4y - 7z \end{pmatrix} \tag{21}$$

である．　従って, $\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は,

$$\begin{pmatrix} x - 2y - 3z \\ 2x + 3y + 1z \\ 3x - 4y - 7z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} \tag{22}$$

ベクトルの同値の定義より,　これは §2.1 の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + z = -4 \\ 3x - 4y - 7z = 10 \end{cases} \tag{23}$$

と同じである．

1-III-2 行列の和とスカラー倍

先の章で行列と連立一次方程式の対応関係を見た．連立一次方程式を解くのにこれを応用する場合, 連立一次方程式の解き方である消去法を思い出す必要がある．例えば, 連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{24}$$

を解くとき, 消去法ではある行の定数倍を別の行へ足して変数を減らしえゆく．1 行目の k 倍を 2 行目に足す場合,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ (a_{21} + ka_{11})x_1 + (a_{22} + ka_{12})x_2 = b_2 \end{cases} \tag{25}$$

のようになる．
例えば，　例として，

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ (1+1)x+((-1)+1)y=2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x=3 \end{cases} \tag{26}$$

と 1 行目を 2 行目に 1 倍して足して y を消去し x を求めること想像すればよい．

これは行列 $\hat{A}$ が以下の変化を行ったことに相当する．

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{pmatrix} \tag{27}$$

この変化では 1 行目を 2 行目にした行列 $\hat{R}_1$ で表すと

$$\hat{R}_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \tag{28}$$

と考えられ, 先ほどの 1 行目を 2 行目に足す行列の操作は,

$$\hat{A}+k\hat{R}_{12} \tag{29}$$

と言う行列の k 倍と和を行ったものと考えられる．このような行の足し算は 2 行目から 1 行目へも y を求めるために行う．そして, その結果は

$$\hat{A}+\hat{R}_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{pmatrix} \tag{30}$$

でなければならない．従って行に寄らず未知変数を消去するような行列の和とスカラー倍を考える必要がある．そしてこのような和は先に述べた行列とベクトルの積の順序の入れ替えと矛盾してはならない．つまり，

$$\hat{A}=\hat{B}+\hat{C} \Leftrightarrow \hat{A}\boldsymbol{x}=\hat{B}\boldsymbol{x}+\hat{C}\boldsymbol{x} \tag{31}$$

これは行列の和を分配律を満たす様に定義すればよいことになる．一方スカラー倍も行列の和と矛盾してはならない．例えば，

$$2\hat{A}=\hat{A}+\hat{A} \tag{32}$$

でなければならない．これらの条件を満たす和とスカラー倍を考える．
これらの条件を満たす和に関しては単純な成分の和と考えればよい．

行列の和

m 行 n 列行列行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ を

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \tag{33}$$

としたときその和を以下で定義する.

$$\hat{A} + \hat{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \tag{35}$$

このとき, それぞれの i 行 j 列成分を a_{ij}, b_{ij} とすると $\hat{A} + \hat{B}$ の i 行 j 列成分は $a_{ij} + b_{ij}$ である.
注意点としては行数と列数が一致している場合のみ和を取ることができる事である.

このように行列の和を決めておけば連立一次方程式

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{36}$$

で

$$\hat{B}\boldsymbol{x} + \hat{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{37}$$

とあらゆる $\boldsymbol{b}$ に対して同じになる，　という意味で

$$\hat{A} = \hat{B} + \hat{C} \tag{38}$$

と意味が一致する．この和は成分で書くと

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{39}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}x + b_{12}y \\ b_{21}x + b_{22}y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11}x + c_{12}y \\ c_{21}x + c_{22}y \end{pmatrix} \tag{40}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}x + c_{11}y + b_{12}x + c_{12}y \\ b_{21}x + c_{21}y + b_{22}x + c_{22}y \end{pmatrix} \tag{41}$$

$$= \begin{pmatrix} (b_{11} + c_{11})x + (b_{12} + c_{12})y \\ (b_{21} + c_{21})x + (b_{22} + c_{22})y \end{pmatrix} \tag{42}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{43}$$

より

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{pmatrix} \tag{44}$$

となっているので, 以前の定義と一致している.

例えばもし行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{45}$$

を考えたときに

$$\hat{A} = \hat{B} + \hat{C} \tag{46}$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{47}$$

のときは,

$$\hat{B} + \hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{48}$$

である.

一方で, 行列のスカラー倍に関しては以下のように決めればよい.

行列のスカラー倍

スカラー定数 k と行列 $\hat{A}$ に対して, 行列のスカラー倍を

$$k\hat{A} = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix} \tag{49}$$

とする. つまりすべての成分 a_{ij} を k 倍すればよい.

とする例えば $k = 2$ とすると

$$2\hat{A} = \begin{pmatrix} 2\times 1 & 2\times 2 \\ 2\times 2 & 2\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \tag{50}$$

この定義は和と無矛盾である. 例えば,

$$2\hat{A} = \hat{A} + \hat{A} \tag{51}$$

が期待されるが, 実際成分で計算すると,

$$\hat{A} + \hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{11} & a_{12} + a_{12} \\ a_{21} + a_{21} & a_{22} + a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} \\ 2a_{21} & 2a_{22} \end{pmatrix} = 2\hat{A} \tag{52}$$

と成立している.

1-III-3 行列の積

連立一次方程式

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{53}$$

を解くとき,

$$\hat{A} = \hat{D}\hat{E} \tag{54}$$

のように積として分解した方が計算が楽になる場合がある. このような積を考えるため, 連立一次方程式では

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{55}$$

と

$$\hat{D}(\hat{E}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \tag{56}$$

があらゆる $\boldsymbol{b}$ に対して同じである必要がある．そのためには, 行列とベクトルの積と行列同士の積をどちらかに結果が寄ってはならない．これを満たすためには,

$$\hat{D}\hat{E}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \tag{57}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11}x + e_{12}y \\ e_{21}x + e_{22}y \end{pmatrix} \tag{58}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11}(e_{11}x + e_{12}y) + d_{12}(e_{21}x + e_{22}y) \\ d_{21}(e_{11}x + e_{12}y) + d_{22}(e_{21}x + e_{22}y) \end{pmatrix} \tag{59}$$

$$= \begin{pmatrix} (d_{11}e_{11} + d_{12}e_{21})x + (d_{11}e_{12} + d_{12}e_{22}) \\ (d_{21}e_{11} + d_{22}e_{21})x + (d_{21}e_{12} + d_{22}e_{22}) \end{pmatrix} \tag{60}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11}e_{11} + d_{12}e_{21} & d_{11}e_{12} + d_{12}e_{22} \\ d_{21}e_{11} + d_{22}e_{21} & d_{21}e_{12} + d_{22}e_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{61}$$

である必要がある．閣下として行列の積を以下のように決めることになる．

$$\hat{D}\hat{E} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \tag{62}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11}e_{11} + d_{12}e_{21} & d_{11}e_{12} + d_{12}e_{22} \\ d_{21}e_{11} + d_{22}e_{21} & d_{21}e_{12} + d_{22}e_{22} \end{pmatrix} \tag{63}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} d_{11}e_{11} + d_{12}e_{21} \\ d_{21}e_{11} + d_{22}e_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11}e_{12} + d_{12}e_{22} \\ d_{21}e_{12} + d_{22}e_{22} \end{pmatrix} \right) \tag{64}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} \right) \tag{65}$$

$$= \left(\hat{D} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} \quad \hat{D} \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} \right) \tag{66}$$

行列の積

m 行 n 列行列 $\hat{D}$ と n 行 l 列行列 $\hat{E}$ を考えたとき, その積 $\hat{D}\hat{E}$ の l 列成分は $\hat{E}$ の j 列ベクトルを $\boldsymbol{e}_j$ として $\hat{D}\boldsymbol{e}_j$ となる．すなわち,

$$\hat{A}\hat{B} = \begin{pmatrix} \hat{D}\boldsymbol{e}_1 & \hat{D}\boldsymbol{e}_2 \dots & \hat{D}\boldsymbol{e}_l \end{pmatrix}. \tag{67}$$

次の例を考えよう

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{68}$$

とすると

$$\hat{D}\hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{69}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \tag{70}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 1 + 0\times 0 & 1\times 2 + 0\times 0 \\ 2\times 1 + 1\times 0 & 2\times 2 + 0\times 0 \end{pmatrix} \tag{71}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{72}$$

- **行列の積の交換**

  行列の積は交換しない, 例えば,

$$\hat{E}\hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 2 & 1\times 0 + 2\times 1 \\ 0\times 2 + 0\times 2 & 0\times 0 + 0\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A \tag{73}$$

従って

$$\hat{D}\hat{E} \neq \hat{E}\hat{D} \tag{74}$$

である. 一般に行列の積は可換

$$\hat{D}\hat{E} = \hat{E}\hat{D} \tag{75}$$

ではない.

- **行列の冪**

  今後, 同じ行列 $\hat{A}$ を n 回かける場合 $\hat{A}^n$ と略す.

- **単位行列**

  また行列の積にも定数の積の 1 に対応するものが存在して単位行列と呼ぶ. 2 行 2 列の行列の場合は

$$\hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{76}$$

実際

$$\hat{I}_2\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 0\times 2 & 1\times 2 + 0\times 4 \\ 0\times 2 + 1\times 2 & 0\times 2 + 1\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{77}$$

かつ

$$\hat{A}\hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 2 & 1\times 0 + 2\times 1 \\ 2\times 0 + 4\times 1 & 2\times 0 + 4\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{78}$$

となり左から掛けても右から掛けても元の行列 $\hat{A}$ になる.