補足 7　行列式の性質と計算

- 行列式の計算を定義から行うのは困難．ところが, 行列のように行基本変形から容易に計算できる．それは次の二つの事実を用いる．

  1. 行列式は行基本変形で以下の様に変形される．n 次正方行列 $\hat{A} = (a_{ij})$ を考える．

     (a) ある行 (i 行目とする) を定数 k 倍すると行列式は k 倍される．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{414}$$

     – 例 2 次の正方行列

$$\hat{A} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{415}$$

     に対して 1 行目を 2 倍した行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{416}$$

     の行列式を考えると,

$$|\hat{A}'| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\times 1 & 2\times 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2|\hat{A}| \tag{417}$$

     実際, $|\hat{A}'| = 2$ で $|\hat{A}| = 1$ であるから満たされている．

     – 例 3 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{418}$$

     に対して 2 行目を 2 倍した行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{419}$$

     の行列式を考えると,

$$|\hat{A}'| = 2|\hat{A}| \tag{420}$$

     実際, $|\hat{A}'| = -6$ で $|\hat{A}| = -3$ であるから満たされている．

(b) ある行の定数 k 倍を別の行に足しても行列式は変わらない.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \dots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{421}$$

– 例 2 次の正方行列

$$\hat{A} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{422}$$

に対して 2 行目を 2 倍した行を 1 行目に足した行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{423}$$

の行列式を考えると,

$$|\hat{A}'| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+0 & 2+2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |\hat{A}| + 2\times 0 = |\hat{A}| \tag{424}$$

実際, $|\hat{A}'| = 1$ で $|\hat{A}| = 1$ であるから満たされている.

– 例 3 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{425}$$

に対して 2 行目を 2 倍したものを 1 行目に足した行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{426}$$

の行列式を考えると,

$$|\hat{A}'| = |\hat{A}| \tag{427}$$

実際, $|\hat{A}'| = -3$ で $|\hat{A}| = -3$ であるから満たされている.

(c) 二つの行を入れ替えると行列式の符号が変わる.

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= -
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\tag{428}
$$

– 例 2 次の正方行列

$$
\hat{A} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{429}
$$

に対して 1 行目と 2 行目を入れ替えた行列

$$
\hat{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{430}
$$

の行列式を考えると,

$$
|\hat{A}'| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -|\hat{A}| \tag{431}
$$

実際, $|\hat{A}'| = -1$ で $|\hat{A}| = 1$ であるから満たされている.

– 例 3 次の正方行列

$$
\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{432}
$$

に対して 1 行目と 2 行目を入れ替えた行列

$$
\hat{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{433}
$$

の行列式を考えると,

$$
|\hat{A}'| = -|\hat{A}| \tag{434}
$$

実際, $|\hat{A}'| = 3$ で $|\hat{A}| = -3$ であるから満たされている.

2. 第一列の成分で 0 出ないものが a_{11} のみの時 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{435}$$

$\hat{A}$ の行列式は

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}|\hat{C}| \end{aligned} \tag{436}$$

ただし,

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{437}$$

– 例 2 次の正方行列

$$\hat{A} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{438}$$

に対して 1 次小さい行列

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \tag{439}$$

との対応を考えると,

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times |\hat{C}| = 1 \tag{440}$$

実際,

– 例 3 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{441}$$

に対して 1 次小さい行列

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{442}$$

の行列式との対応を考えると,

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times |\hat{C}| = -3 \tag{443}$$

実際, $|\hat{C}| = -3$ で $|\hat{A}| = -3$ であるから満たされている.

3. 行列式の計算の仕方
上の二つを用いると, 以下の手順で計算できる.
   (a) 行基本変形で行列式を式 (435) の形にする.
   (b) (436) を使って行列式の次数を一つ減らす
   これを行列式の次数が 1 になるまで繰り返す.

– 例 3 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{444}$$

に対して,

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 1 \times \left|-3\right| = 1 \times 1 \times -3 = -3 \end{aligned} \tag{445}$$

– 例 4 次の正方行列

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 \\ -1 & 11 & 4 \\ 4 & 8 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 0 & 16 & 4 \\ 0 & -12 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times -1 \times \begin{vmatrix} 16 & 4 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times -1 \times 4 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times -1 \times 4 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times -1 \times 4 \times 4 \times |8| = 1 \times -1 \times 4 \times 4 \times 8 \\ &= -128 \end{aligned} \tag{446}$$

– 行列式の積
二つの正方行列の積の行列式は次のように行列式のかけ算で書ける.

$$\left|\hat{A}\hat{B}\right| = \left|\hat{A}\right| \left|\hat{B}\right| \tag{447}$$

$*$ 以下の二つの行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{448}$$

としたとき,

$$\hat{A}\hat{B} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{449}$$

である. 従って,

$$\left|\hat{A}\hat{B}\right| = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4. \tag{450}$$

一方で,

$$\left|\hat{A}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \left|\hat{B}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \tag{451}$$

であり

$$\left|\hat{A}\hat{B}\right| = \left|\hat{A}\right|\left|\hat{B}\right| = -4 \tag{452}$$

となっている.

– 三角行列 $\hat{A}$ の行列式は

$$
|\hat{A}| = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\
0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\
0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\
0 & 0 & 0 & \ddots & a_{4n-1} & a_{4n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}
\end{vmatrix} \tag{453}
$$

は先の計算を繰り返すと,

$$
\begin{aligned}
|\hat{A}| &= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\
0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\
0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\
0 & 0 & 0 & \ddots & a_{4n-1} & a_{4n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}
\end{vmatrix} \\
&= a_{11} \begin{vmatrix}
a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\
0 & a_{23} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\
0 & 0 & \ddots & a_{4n-1} & a_{4n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}
\end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix}
a_{23} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} & \\
0 & \ddots & a_{4n-1} & a_{4n} & \\
0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & a_{nn} &
\end{vmatrix} \\
&\qquad \vdots \\
&= a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{n-1n-1}a_{nn} \\
&= \prod_i a_{ii}
\end{aligned} \tag{454}
$$

となる.

- 行列式の行基本変形の証明

1. (a) ある行を定数 k 倍すると行列式は k 倍される．$\hat{A}=(a_{ij})$ の i 行目が k 倍されている行列を $\hat{A}'$ とすると，定義より

$$\begin{aligned}|\hat{A}'| &= \sum_{\sigma\in P_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots ka_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= k\sum_{\sigma\in P_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= k|\hat{A}| \end{aligned} \tag{455}$$

(b) ある行の定数 k 倍を別の行に足しても行列式は変わらない．この証明には (c) を用いる．まず，$\hat{A}=(a_{ij})$ の i 行目に j 行目の k 倍した行列の行列式 $|A'|$ を考えると，

$$\begin{aligned}|A'| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \\ &= \sum_{\sigma\in P_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots\left(a_{i\sigma(i)}+ka_{j\sigma(j)}\right)\cdots a_{j\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in P_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{j\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\ &+ k\sum_{\sigma\in P_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{j\sigma(j)}\cdots a_{j\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{456}$$

第二項では i 行目と j 行目が同じ $(a_{j1}\cdots a_{jn})$ になっている．ところが i 行目と j 行目が同じ行列式のその二つの行を入れ

替えると (c) より，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{457}$$

と 0 になることが分かる．従って第二項を 0 と置くことで，

$$|\hat{A}'| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 = |\hat{A}| \tag{458}$$

(c) 二つの行を入れ替えると行列式の符号が変わる．$\hat{A} = (a_{ij})$ の i 行目に j 行目が入れ替わった行列を $\hat{A}'$ とすると，

$$\begin{aligned} |\hat{A}'| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(j) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(n)) \\ &\times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(j) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(n)) \\ &\times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned} \tag{459}$$

一方,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(j)\sigma(i+1)\sigma(i+2)\cdots\sigma(i)\cdots\sigma(n)) \\
&= -1\times\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(i+1)\sigma(j)\sigma(i+2)\cdots\sigma(i)\cdots\sigma(n)) \\
&= (-1)^2\times\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(i+1)\sigma(i+2)\sigma(j)\cdots\sigma(i)\cdots\sigma(n)) \\
&= (-1)^{(j-i)}\times\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(i+1)\sigma(i+2)\cdots\sigma(i)\sigma(j)\cdots\sigma(n)) \\
&= (-1)^{(j-i)}\times(-1)^{(j-i-1)}\times\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(i)\sigma(i+1)\sigma(i+2)\cdots\sigma(j)\cdots\sigma(n)) \\
&= -\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(i)\sigma(i+1)\sigma(i+2)\cdots\sigma(j)\cdots\sigma(n))
\end{aligned}
\tag{460}
$$

従って,

$$
\begin{aligned}
|\hat{A}'| &= \sum_{\sigma\in P_n}\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(j)\cdots\sigma(i)\cdots\sigma(n)) \\
&\times a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{j\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= -\sum_{\sigma\in P_n}\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(i)\cdots\sigma(j)\cdots\sigma(n)) \\
&\times a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{j\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= -|\hat{A}|
\end{aligned}
\tag{461}
$$

- 第一列の成分で 0 出ないのが a_{11} のみの場合の証明

1. 次のような行列式 $|\hat{A}|$ を考える.

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \tag{462}$$

この行列式は必ず定義の数ある項の中で一行目から a_{11} を選ぶ項のみが 0 でない. そのような a_{11} を含む項はすでに 1 行目から成分を選んでいるため b_{1i} のいずれかの成分を含めない. 従って

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(1, \sigma(2) \cdots \sigma(n)) a_{11} c_{2\sigma(2)} c_{3\sigma(3)} \cdots c_{n\sigma(n)} \tag{463}$$

ここで $\mathrm{sgn}(1, \sigma(2) \cdots \sigma(n))$ は最初の 1 が固定されているため, $\mathrm{sgn}(\sigma(2) \cdots \sigma(n))$ と実質同じになる. 結果として,

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= a_{11} \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma(2) \cdots \sigma(n)) c_{2\sigma(2)} c_{3\sigma(3)} \cdots c_{n\sigma(n)} \\ &= a_{11} |\hat{C}| \end{aligned} \tag{464}$$

ただし,

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{465}$$