

線形代数 I (担当 松下勝義)

III. 行列の演算

教科書 §3.1-3.2, pp.29-32

講義ノート

ここまで行列と連立一次方程式の対応関係についてみてきた。この行列には連立一次方程式との関係を崩さず和や掛け算が定義できる。これ以降簡単のため 2 行 2 列の行列に絞って話す。

- 行列の和連立一次方程式

$$\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (143)$$

は

$$\hat{B}\mathbf{x} + \hat{C}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (144)$$

とあらゆる \mathbf{b} に対して同じになる, という意味で

$$\hat{A} = \hat{B} + \hat{C} \quad (145)$$

という和が定義できる。この和は成分で書くと

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (146)$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}x + b_{12}y \\ b_{21}x + b_{22}y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11}x + c_{12}y \\ c_{21}x + c_{22}y \end{pmatrix} \quad (147)$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}x + c_{11}y + b_{12}x + c_{12}y \\ b_{21}x + c_{21}y + b_{22}x + c_{22}y \end{pmatrix} \quad (148)$$

$$= \begin{pmatrix} (b_{11} + c_{11})x + (b_{12} + c_{12})y \\ (b_{21} + c_{21})x + (b_{22} + c_{22})y \end{pmatrix} \quad (149)$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (150)$$

より

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{pmatrix} \quad (151)$$

とすれば成立する。つまり、成分毎の和を計算すればよい。この計算から行列の和は行と列の数が一致している場合のみ可能であることが分かる。

例えばもし行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (152)$$

を考えたときに

$$\hat{A} = \hat{B} + \hat{C} \quad (153)$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (154)$$

のときは,

$$\hat{B} + \hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \quad (155)$$

である。

- 行列の積

$$\hat{A} = \hat{B}\hat{C} \quad (156)$$

としたとき、連立一次方程式では

$$\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (157)$$

と

$$\hat{D}(\hat{E}\mathbf{x}) = \mathbf{b} \quad (158)$$

があらゆる \mathbf{b} に対して同じである。そのためには、

$$\hat{D}\hat{E}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \quad (159)$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11}x + e_{12}y \\ e_{21}x + e_{22}y \end{pmatrix} \quad (160)$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11}(e_{11}x + e_{12}y) + d_{12}(e_{21}x + e_{22}y) \\ d_{21}(e_{11}x + e_{12}y) + d_{22}(e_{21}x + e_{22}y) \end{pmatrix} \quad (161)$$

$$= \begin{pmatrix} (d_{11}e_{11} + d_{12}e_{21})x + (d_{11}e_{12} + d_{12}e_{22})y \\ (d_{21}e_{11} + d_{22}e_{21})x + (d_{21}e_{12} + d_{22}e_{22})y \end{pmatrix} \quad (162)$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11}e_{11} + d_{12}e_{21} & d_{11}e_{12} + d_{12}e_{22} \\ d_{21}e_{11} + d_{22}e_{21} & d_{21}e_{12} + d_{22}e_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (163)$$

であるので、次のように行列の積を定義する。

$$\hat{D}\hat{E} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \quad (164)$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11}e_{11} + d_{12}e_{21} & d_{11}e_{12} + d_{12}e_{22} \\ d_{21}e_{11} + d_{22}e_{21} & d_{21}e_{12} + d_{22}e_{22} \end{pmatrix} \quad (165)$$

次の例を考えよう

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (166)$$

とすると

$$\hat{D}\hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 0 & 1 \times 2 + 0 \times 0 \\ 2 \times 1 + 1 \times 0 & 2 \times 2 + 0 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \quad (167)$$

注意！

$$\hat{E}\hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times 0 + 2 \times 1 \\ 0 \times 2 + 0 \times 2 & 0 \times 0 + 0 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \hat{A} \quad (168)$$

従って

$$\hat{D}\hat{E} \neq \hat{E}\hat{D} \quad (169)$$

である。一般に行列の積は可換

$$\hat{D}\hat{E} = \hat{E}\hat{D} \quad (170)$$

ではない。

また行列の積にも定数の積の1に対応するものが存在して単位行列と呼ぶ。2行2列の行列の場合は

$$\hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (171)$$

実際

$$\hat{I}_2\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 2 & 1 \times 2 + 0 \times 4 \\ 0 \times 2 + 1 \times 2 & 0 \times 2 + 1 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \quad (172)$$

かつ

$$\hat{A}\hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times 0 + 2 \times 1 \\ 2 \times 0 + 4 \times 1 & 2 \times 0 + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \quad (173)$$

となり左から掛けても右から掛けても元の行列 \hat{A} になる.

- スカラー倍行列の定数 k 倍を

$$k\hat{A} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix} \quad (174)$$

とする例えば $k = 2$ とすると

$$2\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 2 \times 2 & 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad (175)$$