

補足6 行列式の定義

1. ある n 次正方行列 \hat{A}

の行列式 $|\hat{A}|$ と余因子行列 \hat{A} を用いて

$$\hat{A}\hat{A} = |\hat{A}|\hat{I}_n \quad (108)$$

と書ける (定理 4.13). もし, 行列式が 0 出なければ, 逆行列は

$$\hat{A}^{-1} = \frac{\hat{A}}{|\hat{A}|} \quad (109)$$

と書ける.

行列式は以下の理由で重要である.

- 行列式が 0 かどうかは逆行列の存在は同値である (定理 4.10).
- 余因子行列も行列式で書けるため, 逆行列は行列式のみで表すことができる. 式変形で便利な場合がある.
- 行列式は 多変数積分の変数変換 で重要な役割を果たす.

以上の理由から必ず計算できるようになる事.

2. 行列式の簡単な例

- 2 次の正方行列 $\hat{A} = (a_{ij})$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (110)$$

のとき行列式 $|\hat{A}|$ は

$$|\hat{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (111)$$

- 例
2 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (112)$$

の場合

$$|\hat{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \times 1 - 2 \times 0 = 1 \quad (113)$$

3. 正確な行列式の定義

- n 次の順列 σ を

$$\sigma = (\sigma(1) \ \sigma(2) \ \dots \ \sigma(n)) \quad (114)$$

とする.

- n 次の順列の符号を $\text{sgn}(\sigma)$ とする.
- 全ての n 次の順列の集合を P_n とする.

このとき n 次正方行列 \hat{A}

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (115)$$

の行列式 $|\hat{A}|$ は

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= \sum_{\sigma \in P_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned} \quad (116)$$

- 例
2 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (117)$$

とする.

このとき

- 成分は $a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{21} = 0, a_{22} = 1$
- 2 次の順列は $\sigma = (\sigma(1) \sigma(2)) = (1 \ 2)$ 及び $\sigma' = (\sigma'(1) \sigma'(2)) = (2 \ 1)$ の二つがあり, その全体の集合 P_2 は $\{\sigma, \sigma'\}$ である.

\hat{A} の行列式は

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= \operatorname{sgn}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)a_{11}a_{22} + \operatorname{sgn}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)a_{12}a_{21} \\ &= \operatorname{sgn}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)1 \times 1 + \operatorname{sgn}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)2 \times 0 \end{aligned} \quad (118)$$

$$(119)$$

後で定義するが $\operatorname{sgn}(1 \ 2) = 1, \operatorname{sgn}(2 \ 1) = -1$ である. 結果として,

$$|\hat{A}| = 1 \times 1 \times 1 + (-1) \times 2 \times 0 = 1 \quad (120)$$

4. 順列 σ の符号 $\text{sgn}(\sigma)$ の定義

(a) n 次の順列

i. n 次の順列 1 から n までの数,

$$1, 2, 3, \dots, n \quad (121)$$

を任意の順番に並べたもの

$$\sigma = (\sigma(1) \ \sigma(2) \ \sigma(3) \ \dots \ \sigma(n)) \quad (122)$$

と表し, それを 順列 と呼ぶ.

• 例 2 次の順列

$$\sigma = (2 \ 1) \quad (123)$$

• 例 3 次の順列

$$\sigma = (3 \ 1 \ 2) \quad (124)$$

この場合 $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2$ である.

ii. n 次の基本順列

$$1, 2, 3, \dots, n \quad (125)$$

をその順番に並べた順列

$$\sigma = (1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n) \quad (126)$$

は特別に 基本順列 と呼ぶ.

• 例 2 次の基本順列

$$\sigma = (1 \ 2). \quad (127)$$

• 例 3 次の基本順列

$$\sigma = (1 \ 2 \ 3). \quad (128)$$

iii. 順列の転位数

与えられた順列

$$\sigma = (\sigma(1) \ \sigma(2) \ \sigma(3) \ \dots \ \sigma(n)) \quad (129)$$

に対して,

$$i < j \quad \text{かつ} \quad \sigma(i) > \sigma(j) \quad (130)$$

となる i と j の対の数を 転位数 と呼ぶ. 転位数が偶数の順列を 偶順列, 奇数の順列を 奇順列 と呼ぶ.

- 例 1 2 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (131)$$

の場合 $\sigma(1) = 1 < \sigma(2) = 2$ であるため転位数は 0 である。この順列は偶順列である。

- 例 2

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (132)$$

の場合 $\sigma(1) = 2 > \sigma(2) = 1$ であるため転位数は 1 である。この順列は奇順列である。

- 例 3 3 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (133)$$

の場合 $\sigma(1) = 3 > \sigma(2) = 1$, $\sigma(1) = 3 > \sigma(3) = 2$, $\sigma(2) = 1 < \sigma(3) = 2$ であるため転位数は 2 である。この順列は偶順列である。

- 例 4 3 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (134)$$

の場合 $\sigma(1) = 3 > \sigma(2) = 2$, $\sigma(1) = 3 > \sigma(3) = 1$, $\sigma(2) = 2 > \sigma(3) = 1$ であるため転位数は 3 である。この順列は奇順列である。

iv. 順列の符号

順列 σ の符号 $\text{sgn}(\sigma)$ は以下の順列の関数である。

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \text{ が偶順列} \\ -1 & \sigma \text{ が奇順列} \end{cases} \quad (135)$$

- 例 2 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (136)$$

は偶順列であるため $\text{sgn}(\sigma) = 1$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (137)$$

の場合奇順列であるため $\text{sgn}(\sigma) = -1$

- 例 3 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (138)$$

の場合偶順列であるため $\text{sgn}(\sigma) = 1$ である。3 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (139)$$

の場合奇順列であるため $\text{sgn}(\sigma) = -1$ である。

(b) n 次順列の集合 P_n

n 次順列すべての集合を P_n と表す.

また σ が P_n に属するとき,

$$\sigma \in P_n \quad (140)$$

と表す.

• 例 2 次順列の集合

$$P_2 = \left\{ (1 \ 2), (2 \ 1) \right\} \quad (141)$$

• 例 3 次順列の集合

$$P_3 = \left\{ (1 \ 2 \ 3), (2 \ 1 \ 3), (3 \ 2 \ 1), \right. \\ \left. (1 \ 3 \ 2), (2 \ 3 \ 1), (3 \ 1 \ 2) \right\} \quad (142)$$

である. また, 3 次順列

$$\sigma = (3 \ 1 \ 2) \quad (143)$$

は $\sigma \in P_3$ であるが, 2 次順列

$$\tau = (1 \ 2) \quad (144)$$

は $\tau \notin P_3$ である.

5. 行列式の例

- 2次正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (145)$$

の行列式は

$$|\hat{A}| = \text{sgn}((1, 2))a_{11}a_{22} + \text{sgn}((2, 1))a_{12}a_{21} \quad (146)$$

$$= \text{sgn}((1, 2))1 \times 1 + \text{sgn}((2, 1))2 \times 0 \quad (147)$$

$$= \text{sgn}((1, 2))1 \quad (148)$$

$$= 1 \times 1 = 1 \quad (149)$$

- 3次正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (150)$$

の行列式は

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= \text{sgn}((1, 2, 3))a_{11}a_{22}a_{33} + \text{sgn}((2, 1, 3))a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + \text{sgn}((3, 2, 1))a_{13}a_{22}a_{31} + \text{sgn}((1, 3, 2))a_{11}a_{23}a_{32} \\ &\quad + \text{sgn}((2, 3, 1))a_{12}a_{23}a_{31} + \text{sgn}((3, 1, 2))a_{13}a_{21}a_{32} \end{aligned} \quad (151)$$

$$\begin{aligned} &= \text{sgn}((1, 2, 3))1 \times 1 \times 1 + \text{sgn}((2, 1, 3))2 \times 0 \times 1 \\ &\quad + \text{sgn}((3, 2, 1))1 \times 1 \times 0 + \text{sgn}((1, 3, 2))1 \times 2 \times 2 \\ &\quad + \text{sgn}((2, 3, 1))2 \times 2 \times 0 + \text{sgn}((3, 1, 2))1 \times 0 \times 1 \end{aligned} \quad (152)$$

$$= \text{sgn}((1, 2, 3))1 + \text{sgn}((1, 3, 2))4 \quad (153)$$

$$= 1 \times 1 + (-1) \times 4 = -3 \quad (154)$$