演習 2.1　回答

1.

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 15 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ 11 & 7 & 0 & -30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \hat{C} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -6 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って,

$$r(\hat{A}) = 3$$

である. また, $r(\hat{A}) = 3$ であり, かつ, $d_4 = 0$ であるので解は存在する. さらに, 未知数の数 (もしくは $\hat{A}$ の列の数) が n=3 である.
従って, $r(\hat{A}) = n$ であり定理 2.4 から解は一意である.
その解は $\boldsymbol{d}$ より,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \hat{C} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

従って,

$$r(\hat{A}) = 1$$

である. また, 階段行列 $(\hat{C} \ \ \boldsymbol{d})$ を見ると, $r(\hat{A}) = 1$ であるが $d_2 \neq 0$ であり定理 2.4 から解は存在しない.

3.

$$\begin{pmatrix}\hat{A} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\hat{C} & \boldsymbol{d}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って,

$$r(\hat{A}) = 3$$

である．また, $r(\hat{A}) = 3$ であり, かつ, 未知数の数 (もしくは $\hat{A}$ の列の数) が $n = 4$ である．従って, $n - r(\hat{A}) = 1$ であり, かつ, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ であるから定理 2.5 から解は未知変数 c を一つ含む形で存在する．

対応する連立一次方程式は,

$$\begin{cases} w \qquad\qquad 2z = 0 \\ \qquad x \qquad \frac{2}{3}z = 0 \\ \qquad\qquad y \; -\frac{1}{3}z = 0 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

ピボットでない未知数を $z = c$ とすると解は,

$$\begin{cases} w = -2c \\ x = -\frac{2}{3}c \\ y = \frac{1}{3}c \\ z = c \end{cases}$$

となる．