線形代数 I (担当 松下勝義)

VI. 行列式の解法

教科書 §4.3-4.6, pp.53–75

- 行列式の解法
  まず行列式に対して一列目の一番上以外が 0 のときより小さい行列式に帰着される.

  – n=2 の場合

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} &= \mathrm{sgn}(12)a_{11}a_{22} + 0 \\ &= a_{11}\mathrm{sgn}(2)a_{22} \\ &= a_{11}|a_{22}|\end{aligned}$$

  – 具体例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix} = 3 \tag{442}$$

  実際,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(1\ 2)1 \times 3 + \mathrm{sgn}(2\ 1)2 \times 0 = 1 \times 3 = 3 \tag{443}$$

  と一致する.

  – 三次元の場合

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \mathrm{sgn}(1\ 2\ 3)a_{11}a_{22}a_{33} + \mathrm{sgn}(1\ 3\ 2)a_{11}a_{32}a_{23} + 0 + \cdots + 0 \\ &= a_{11}\left(\mathrm{sgn}(2\ 3)a_{22}a_{33} + \mathrm{sgn}(3\ 2)a_{32}a_{23}\right) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{444}$$

  – 具体例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times (\mathrm{sgn}(1\ 2)4 \times 7 + \mathrm{sgn}(2\ 1)5 \times 6) = -2 \tag{445}$$

– 高次元でも数学的帰納法で同じことがいえる (教科書参照)

– 行列の次元低減による解法

行列の次元低減による解法

もし行列 $\hat{A}$ の行列式の $|\hat{A}|$ の左の列ベクトルを

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{446}$$

と変形できれば

n 次元行列式 $\Rightarrow$ $n-1$ 次元行列式 $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ 2 次元行列式

と次元を小さくして低次元の行列式の計算にすることで計算できる.

– 式 (446) は行基本変形で変形することで実現できる.

行列式の行基本変形

1. 一つの行に 0 出ない定数 k を掛ける.
   $\Rightarrow$ 行列式は k 倍される.
   例:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{447}$$

2. 一つの行の低数倍を他の行に足す. $\Rightarrow$ 行列式は変わらない.
   例:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{448}$$

3. 行を入れ替える.
   $\Rightarrow$ 行列式の符号が変わる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \tag{449}$$

これらの行基本変形を使えば掃き出し法でやったように一列目を (446) のように変形できる.

- 行の定数倍の具体例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 0 = 0 \tag{450}$$

実際に

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(1\ 2) 1 \times 4 + \mathrm{sgn}(2\ 1) 2 \times 2 = 4 - 4 = 0 \tag{451}$$

- 行列式の計算の例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 8 & 10 \end{vmatrix} \overset{②-①}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 10 \end{vmatrix} \tag{452}$$

$$\overset{②-③}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} \tag{453}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \tag{454}$$

$$\overset{②-①}{=} 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \tag{455}$$

$$\overset{②/2}{=} 1 \times 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{456}$$

$$\overset{①\Leftrightarrow②}{=} 1 \times 2 \times (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \tag{457}$$

$$\overset{②-4①}{=} 1 \times 2 \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{458}$$

$$= 1 \times 2 \times (-1) \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times (-1) \times 1 \times 1 = -2 \tag{459}$$

- 行列式と列基本変形行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{460}$$

の転置したもの

$$\hat{A}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{461}$$

を転置行列と呼ぶ．このとき

転置行列の行列式

$$|\hat{A}| = |\hat{A}^t| \tag{462}$$

従って次のことがいえる．

行列式の列基本変形

列に対する基本変形を行っても行基本変形と同じことが成立する．

- 余因子展開

多重線形性を考えるとある行を次のように分解できる．

余因子展開

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \sum_j a_{ij}(-1)^(i+j) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{1-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1n} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{463}$$

余因子展開の例を挙げると，

– n=2 の場合,
多重線形性から

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{464}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} \tag{465}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} \end{vmatrix} + (-1) a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} \end{vmatrix} \tag{466}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} \end{vmatrix} \tag{467}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} \tag{468}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 0 & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} \tag{469}$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} \tag{470}$$

$$= a_{22} (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} + (-1) a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} \end{vmatrix} \tag{471}$$

$$= (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} \end{vmatrix} \tag{472}$$

– n=3 の場合,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a13 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{473}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{474}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{475}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^2 a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{476}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{477}$$

などと展開できる.

余因子

余因子展開を

$$\left|\hat{A}\right| = \sum_j a_{ij}\tilde{a}_{ij} \tag{478}$$

と書いたとき, n-1 行 n-1 列行列の行列式 $\tilde{a}_{ij}$

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^(i+j) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{1-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1n} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{479}$$

を余因子と呼ぶ.

余因子に対して以下の性質がある.

余因子の性質

行列 $\hat{A}$ の i 行目の余因子を列に並べたベクトル

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_i = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{i1} \\ \tilde{a}_{i2} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{in} \end{pmatrix} \tag{480}$$

に対して j 行ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ を考えると

$$\begin{cases} i = j & \boldsymbol{a}_j \tilde{\boldsymbol{a}}_i = \boldsymbol{a}_i \tilde{\boldsymbol{a}}_i = \sum_k a_{ik} \tilde{a}_{ik} = \left| \hat{A} \right| \\ i \neq j & \boldsymbol{a}_j \tilde{\boldsymbol{a}}_i = \sum_k a_{jk} \tilde{a}_{ik} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i-1} \\ \boldsymbol{a}_j \\ \boldsymbol{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \tag{481}$$

従って, 余因子行列 $\hat{\hat{A}}$

$$\hat{\hat{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1 & \tilde{\boldsymbol{a}}_2 & \dots & \tilde{\boldsymbol{a}}_n \end{pmatrix} \tag{482}$$

を考えると,

$$\hat{A}\hat{\hat{A}} = \begin{pmatrix} \left|\hat{A}\right| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left|\hat{A}\right| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \left|\hat{A}\right| \end{pmatrix} = \left|\hat{A}\right| \hat{I}_n \tag{483}$$

となる. そのため次の逆行列の公式 (Cramer's rule) が成り立つ.

逆行列の公式

$$\hat{A}^{-1} = \frac{\hat{\hat{A}}}{\left|\hat{A}\right|} \tag{484}$$

- 行列式の積

行列式の積

次元が同じ正方行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の行列式の積にたいして,

$$\left|\hat{A}\hat{B}\right| = \left|\hat{A}\right|\left|\hat{B}\right| \tag{485}$$

のように $|\hat{A}|$ とに $|\hat{B}|$ の積になる.

- 逆行列の行列式

逆行列の行列式

正則行列 $\hat{A}$ の逆行列 $\hat{A}^{-1}$ の行列式は,

$$\left|\hat{A}^{-1}\right| = \left|\hat{A}^{-1}\right|\frac{\left|\hat{A}\right|}{\left|\hat{A}\right|} = \frac{\left|\hat{A}^{-1}\hat{A}\right|}{\left|\hat{A}\right|} = \frac{1}{\left|\hat{A}\right|} \tag{486}$$

なので $|\hat{A}|$ の逆行列になる.