

## 線形代数 II (担当 松下勝義)

### 演習問題 4. (線形変換と行列表現)

- 演習問題 4-1.  $\mathbb{R}^2$  の標準基底を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (94)$$

とする. 線形変換  $f(x)$  を

$$f(e_1) = e_1, \quad (95)$$

$$f(e_2) = -e_1 + e_2 \quad (96)$$

- (1)  $f(x)$  の表現行列  $\hat{A}$  を答えよ.
- (2) 標準基底上の座標  $a=(2, 2)$  の  $f(x)$  での変換先を与え, 図示せよ.

- 演習問題 4-2.  $\mathbb{R}^2$  の以下の基底  $\{a_1, a_2\}$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

で表された線形変換

$$f_a(a_1) = a_2, \quad (97)$$

$$f_a(a_2) = -a_1 + 2a_2 \quad (98)$$

に対して以下の問いに答えよ.

- (1)  $f_a(x)$  の基底  $\{a_1, a_2\}$  での表現行列  $\hat{A}_a$  を与えよ.
- (2)  $2a_1$  の  $f_a(x)$  による変換先を与え, 標準基底の座標で図示せよ.
- (3) 基底  $\{a_1, a_2\}$  と標準基底  $\{e_1, e_2\}$  が

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \hat{P} \quad (99)$$

と表されるとき  $\hat{P}$  を与えよ.

- (4)  $a_1$  と  $a_2$  を  $e_1$  と  $e_2$  を用いて表せ.
- (5)  $f_a(x)$  の標準基底での線形変換  $f_e(e_1), f_e(e_2)$  を与えよ.
- (6) 標準基底を用いた表現行列  $\hat{A}$  が  $\hat{A}_a$  と  $\hat{P}$  を用いて

$$\hat{A} = \hat{P} \hat{A}_a \hat{P}^{-1} \quad (100)$$

と表せるか確かめよ.