補足6　行列式の定義

1. ある n 次正方行列 $\hat{A}$
   の行列式 $|\hat{A}|$ と余因子行列 $\tilde{A}$ を用いて
   $$\hat{\tilde{A}}\hat{A} = |\hat{A}|\hat{I}_n \tag{108}$$
   と書ける (定理 4.13). もし, 行列式が 0 出なければ, 逆行列は
   $$\hat{A}^{-1} = \frac{\hat{\tilde{A}}}{|\hat{A}|} \tag{109}$$
   と書ける.
   行列式は以下の理由で重要である.
   - 行列式が 0 かどうかは逆行列の存在は同値である (定理 4.10).
   - 余因子行列も行列式で書けるため, 逆行列は行列式のみで表すことができる. 式変形で便利な場合がある.
   - 行列式は 多変数積分の変数変換 で重要な役割を果たす.

   以上の理由から必ず計算できるようになる事.
2. 行列式の簡単な例
   - 2 次の正方行列 $\hat{A} \quad = (a_{ij})$
     $$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{110}$$
     のとき行列式 $|\hat{A}|$ は
     $$|\hat{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{111}$$
   - 例
     2 次の正方行列
     $$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{112}$$
     の場合
     $$|\hat{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \times 1 - 2 \times 0 = 1 \tag{113}$$

3. 正確な行列式の定義

- n 次の順列 σ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{114}$$

  とする.

- n 次の順列の符号を $\mathrm{sgn}(\sigma)$ とする.
- 全ての n 次の順列の集合を P_n とする.

このとき n 次正方行列 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{115}$$

の行列式 $|\hat{A}|$ は

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned} \tag{116}$$

- 例
  2 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{117}$$

とする.
このとき

- 成分は $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 1$
- 2 次の順列は $\sigma = (\sigma(1)\ \sigma(2)) = (1\ 2)$ 及び $\sigma' = (\sigma'(1)\ \sigma'(2)) = (2\ 1)$ の二つがあり, その全体の集合 P_2 は $\{\sigma, \sigma'\}$ である.

$\hat{A}$ の行列式は

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= \mathrm{sgn}(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix})a_{11}a_{22} + \mathrm{sgn}(\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix})a_{12}a_{21} \\ &= \mathrm{sgn}(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix})1 \times 1 + \mathrm{sgn}(\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix})2 \times 0 \qquad (118) \\ & \qquad (119) \end{aligned}$$

後で定義するが $\mathrm{sgn}(1\ 2) = 1$, $\mathrm{sgn}(2\ 1) = -1$ である. 結果として,

$$|\hat{A}| = 1 \times 1 \times 1 + (-1) \times 2 \times 0 = 1 \tag{120}$$

4. 順列 σ の符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ の定義

(a) n 次の順列

i. n 次の順列1 から n までの数,

$$1, 2, 3, \ldots n \tag{121}$$

を任意の順番に並べたもの

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{122}$$

と表し, それを 順列 と呼ぶ.

- 例 3 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{123}$$

この場合 $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(2) = 2$ である.

ii. n 次の基本順列

$$1, 2, 3, \ldots n \tag{124}$$

をその順番に並べた順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix} \tag{125}$$

は特別に 基本順列 と呼ぶ.

- 例 3 次の基本順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \tag{126}$$

iii. 順列の転位数

与えられた順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{127}$$

に対して,

$$i < j \quad \text{かつ} \quad \sigma(i) > \sigma(j) \tag{128}$$

となる i と j の対の数を 転位数 と呼ぶ. 転位数が偶数の順列を 偶順列, 奇数の順列を 奇順列 と呼ぶ.

- 例 1 3 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{129}$$

の場合 $\sigma(1) = 3 > \sigma(2) = 1$, $\sigma(1) = 3 > \sigma(3) = 2$, $\sigma(2) = 1 < \sigma(3) = 2$ であるため転位数は 2 である. この順列は偶順列である.

- 例 2 3 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{130}$$

の場合 $\sigma(1) = 3 > \sigma(2) = 2$, $\sigma(1) = 3 > \sigma(3) = 1$, $\sigma(2) = 2 > \sigma(3) = 1$ であるため転位数は 3 である．この順列は奇順列である．

iv. <u>順列の符号</u>
順列 σ の <u>符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$</u> は以下の順列の関数である．

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma\text{が偶順列} \\ -1 & \sigma\text{が奇順列} \end{cases} \tag{131}$$

- 例 3 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{132}$$

の場合偶順列であるため $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ である．3 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{133}$$

の場合奇順列であるため $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ である．

(b) <u>n 次順列の集合 P_n</u>
n 次の順列すべての集合を P_n と表す．
また σ が P_n に属するとき，

$$\sigma \in P_n \tag{134}$$

と表す．

- 例 3 次の順列の集合

$$P_3 = \Big\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{135}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Big\} \tag{136}$$

である．また，3 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{137}$$

は $\sigma \in P_3$ であるが，2 次の順列

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{138}$$

はは $\tau \notin P_3$ である．

5. 行列式の例

- 行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{139}$$

の行列式は

$$\begin{aligned}
\left|\hat{A}\right| &= \mathrm{sgn}((1,2,3))a_{11}a_{22}a_{33} + \mathrm{sgn}((2,1,3))a_{12}a_{21}a_{33} \\
&+ \mathrm{sgn}((3,2,1))a_{13}a_{22}a_{31} + \mathrm{sgn}((1,3,2))a_{11}a_{23}a_{32} \\
&+ \mathrm{sgn}((2,3,1))a_{12}a_{23}a_{31} + \mathrm{sgn}((3,1,2))a_{13}a_{21}a_{32} \qquad (140) \\
&= \mathrm{sgn}((1,2,3))1 \times 1 \times 1 + \mathrm{sgn}((2,1,3))2 \times 0 \times 1 \\
&+ \mathrm{sgn}((3,2,1))1 \times 1 \times 0 + \mathrm{sgn}((1,3,2))1 \times 2 \times 2 \\
&+ \mathrm{sgn}((2,3,1))2 \times 2 \times 0 + \mathrm{sgn}((3,1,2))1 \times 0 \times 1 \qquad (141) \\
&= \mathrm{sgn}((1,2,3))1 + \mathrm{sgn}((1,3,2))4 \qquad (142) \\
&= 1 \times 1 + (-1) \times 4 = -3 \qquad (143)
\end{aligned}$$