

## 演習 2.1 回答

1.

$$(\hat{A} \ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 15 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ 11 & 7 & 0 & -30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\hat{C} \ \mathbf{d}) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -6 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って,

$$r(\hat{A}) = 3$$

である。また,  $r(\hat{A}) = 3$  であり, かつ,  $d_4 = 0$  であるので解は存在する。さらに, 未知数の数 (もしくは  $\hat{A}$  の列の数) が  $n=3$  である。従って,  $r(\hat{A}) = n$  であり定理 2.4 から解は一意的である。

その解は  $\mathbf{d}$  より,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2.

$$(\hat{A} \ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\hat{C} \ \mathbf{d}) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

従って,

$$r(\hat{A}) = 2$$

である。また, 階段行列  $(\hat{C} \ \mathbf{d})$  を見ると,  $r(\hat{A}) = 2$  であるが  $d_3 \neq 0$  であり定理 2.4 から解は存在しない。

3.

$$(\hat{A} \quad \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\hat{C} \quad \mathbf{d}) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って,

$$r(\hat{A}) = 3$$

である. また,  $r(\hat{A}) = 3$  であり, かつ, 未知数の数 (もしくは  $\hat{A}$  の列の数) が  $n = 4$  である. 従って,  $n - r(\hat{A}) = 1$  であり, かつ,  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$  であるから定理 2.5 から解は未知変数  $c$  を一つ含む形で存在する.

対応する連立一次方程式は,

$$\begin{cases} w & 2z & = & 0 \\ x & \frac{2}{3}z & = & 0 \\ y & -\frac{1}{3}z & = & 0 \\ & 0 & = & 0 \end{cases}$$

ピボットでない未知数を  $z = c$  とすると解は,

$$\begin{cases} w & = & -2c \\ x & = & -\frac{2}{3}c \\ y & = & \frac{1}{3}c \\ z & = & c \end{cases}$$

となる.