線形代数 II (担当 松下勝義)

III. (基底の取り換え, 直行基底, シュミットの直交化)

- 演習問題 3-1. 二つのベクトルの組からなる基底 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ と $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_b)$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

  に対して

  - (1) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ と $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ を取り換え

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)\hat{P} \tag{55}$$

    で行列 $\hat{P}$ を求めよ.

  - (2)

$$\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle \tag{56}$$

    かどうかを判定せよ.

  - (3) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の基底で座標が $\boldsymbol{c}_a = (1, \sqrt{2})$ のベクトルに対して, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ のの基底での座標 $\boldsymbol{c}_b = (c_1, c_2)$ を求めよ.
  - (4) (3) で求めた $\boldsymbol{c}_b = (c_1, c_2)$ に対して,

$$\hat{P}\boldsymbol{c}_b = \boldsymbol{c}_a \tag{57}$$

    が成立するかどうか答えよ.

- 演習問題 III-3. 次の三次元ベクトル空間の基底以下の三次元ベクトル空間の基底に対して,

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  以下に答えよ.

  - (1) シュミットの直交化法で正規直交基底を作れ.
  - (2) 元の基底で座標が (1, 0, 1) のベクトルに対して, 得られた正規直交基底での座標を求めよ.