

演習 B. (ベクトル空間, 一次独立性, 線形変換と行列表現)

• 演習問題 B-1.

二つのベクトルの組 $A, (a_1, a_2)$ ともう一つの組について $B, (b_1, b_2)$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ.

- (1) 二つの組 A, B はそれぞれ一次独立か従属かを答えよ.
- (2) 4つのすべてのベクトルが張る部分空間 W の次元を答えよ.
- (3) A が生成する部分空間 W_A と B が生成する W_B は同じであることを示せ.
- (4) 部分空間 W_A と W_B の間の行列 \hat{P} ,

$$(b_1, b_2) = (a_1, a_2)\hat{P}$$

を与えよ.

- (5) W_A と W_B からそれぞれシュミットの直交化法で正規直交基底を作れ.

• 演習問題 B-2. 二次元ベクトル空間の以下の基底

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

に対して以下の問いに答えよ.

- (1) 全てのベクトルの第一成分 (上の基底の座標ではなく) の符号を変える線形変換 $r_x(x)$ を与え, その表現行列を答えよ.
- (2) $r_x(x)$ の逆変換の表現行列を答えよ.
- (3) 上の基底での座標 $a = (2, 3)$ を $(7, 5)$ へ, $b = (1, 2)$ を $(4, 3)$ へ移す線形変換 $f(x)$ とその表現行列を与えよ.
- (4) 上の基底での合成変換 $f \circ f(x)$ の表現行列を与えよ.
- (5) $f \circ r_x(x)$ と $r_x \circ f(x)$ は同じか答えよ.