ベクトルと行列 1 (担当 松下勝義)

1-II. 直線と平面

1-II-0. 連立一次方程式と直線や平面

この授業では連立一次方程式を考えることを前回説明した．二元連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

を考える．この連立一次方程式はは二つの式からなるがそれぞれ未知変数 x, y のある直線を意味する．

同様に, 三元連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \tag{2}$$

の解も三つの式が空間中の平面を意味する．

解はそれぞれの直線や平面の式を満たす物であり, それぞれが交わる交点である．

今回は前回のベクトル演算の知識を基に連立一次方程式をなすそれぞれの一次方程式の表す図形との関係を見る．

1-II-1. 直線と直線条件 (p. 25)

● 二次元の直線条件と直線の方程式 (p. 25& p. 29)

二次元平面上のある二つの点 U, V への位置ベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を結ぶ直線状にベクトル $\boldsymbol{x}$ がある条件は直線条件と呼ばれる.

直線条件

$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ を結ぶ直線状にあるためには, ある実数 t があって,

$$\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{u} + (1-t)\boldsymbol{v} \tag{3}$$

と書けなければならない.

このとき t は $\boldsymbol{x}$ の関数直線条件でパラメーターと呼ばれる. 通常は $t(\boldsymbol{x})$ の逆関数 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ を考えて t に対して $\boldsymbol{x}$ が一つ対応するとみなす.

今

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{4}$$

と書くと, この式は

$$x = u_1 t + (1-t)v_1 = (u_1 - v_1)t - v_1 \tag{5}$$

$$y = u_2 t + (1-t)v_2 = (u_2 - v_2)t - v_2 \tag{6}$$

これらの式を t に対して書き直すと,

$$t = \frac{x - v_1}{u_1 - v_1} = \frac{y - v_2}{u_2 - v_2} \tag{7}$$

と書ける. この式の二番目の $=$ で結ばれる関係は**直線の方程式**と呼ばれ, 直線を表す. この式でベクトル $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$, つまり,

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - u_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

は直線の向きと呼ばれ, 実際に直線はそのベクトルの向きに沿って引かれる. この式は三次元に教科書にあるように容易に拡張できる.

● 二次元の直線条件と二元一次方程式

ベクトル $\boldsymbol{d}$ に対して二次元面上でのその垂直なベクトル $\boldsymbol{a}$ を考える.
そのとき,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d} = 0 \tag{9}$$

ただし,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

とおく. 式 (3) の両辺に対して $\boldsymbol{a}$ との内積を取ると,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}) \tag{11}$$

となり,

$$b = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}) \tag{12}$$

とおくとこれは一次方程式,

$$a_1 x + a_2 y = b \tag{13}$$

であり, 二元連立一次方程式の一つとなる.

従って, 二元連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{14}$$

は二つの二次元面上の直線を表し, その解がもし一意に定まるなら解はその交点である.

- ## 1-II-3 直線の並行とベクトルの一次独立性 (p. 15)

二元連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{15}$$

の一意解があれば, 解はそれぞれの二元一次方程式の交点に対応することを述べた. 交点は直線が平行であれば存在しない. 下かって平行性から解の存在は判別できる. 直線の向きは方向ベクトルでも分かるが, それらの垂直ベクトル,

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} \tag{16}$$

の並行性と同じとなる. 解が存在する条件を調べるためには, これらが平行にならない条件を考えればよい.

このためにベクトルの独立性という考え方を説明する. ベクトルの組 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ... を次のような条件を満たすとする. ある定数 k_a, k_b, k_c, ... が存在し,

$$k_a\boldsymbol{a} + k_b\boldsymbol{b} + k_c\boldsymbol{c} + \dots \tag{17}$$

とする. このときこの式の左辺を一次結合と呼ぶ.

一次独立と一次従属

一次結合が零ベクトルとなるとき, つまり

$$k_a\boldsymbol{a} + k_b\boldsymbol{b} + k_c\boldsymbol{c} + \dots = \boldsymbol{0} \tag{18}$$

となるとき,

$$k_a = k_b = k_c = \dots = 0 \tag{19}$$

のときのみ成立するなら一次独立, そうでないなら一次従属と呼ぶ.

一次独立と一次従属の意味を平面ベクトルで考えてみる. 二つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ を考える. このとき一次結合は,

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0} \tag{20}$$

とする. もし一次従属なら $k_1 \neq 0$, $k_1 \neq 0$ となる k_1 と k_1 が存在するため,

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{a}_2 \tag{21}$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{a}_1 \tag{22}$$

と互いに別のベクトルで表現でき, 同じ向きを向いていることが分かる. つまり組の中の任意のベクトルが他のベクトルで表現できるという意味がある.

例えば,

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \tag{23}$$

とすれば,

$$2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0} \tag{24}$$

であり一次従属である. このとき,

$$\boldsymbol{a}_2 = -2\boldsymbol{a}_1 \tag{25}$$

と $\boldsymbol{a}_2$ は $\boldsymbol{a}_1$ が表現できてしまう. これは図示すると,

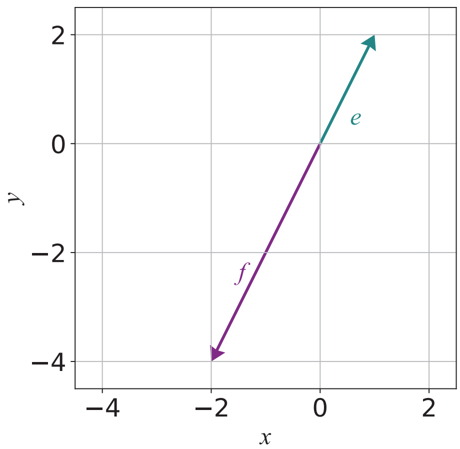

図 1: (7)

2 つのベクトルが平行になっている. 3 つ以上のベクトルに関しても同じような平行なベクトルを作る事ができるという意味がある.

一方で, 次の $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{26}$$

の場合は, 　図示すると のようになって平行でないため互いに相手のベクトルを表現できない. これが一次独立である.

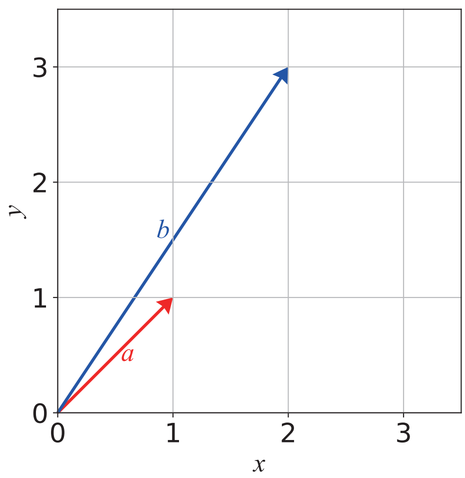

図 2: (8)

並行にならない条件は $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ が一次独立である事である．この場合対応する二元連立一次方程式は解が一つに定まる．

一方, 平行になる場合はそれに対し $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ が一次従属になる．その場合, 二つの直線の重なりには二つの可能性がある．

– 直線が重る．
– 直線が重ならない．

これらはそれぞれ

– 直線が重る．$\Leftrightarrow$ 直線状の無限個の点全てが解．
– 直線が重ならない.$\Leftrightarrow$ 解が存在しない．

となる．解の分類については 3 章に入った後の授業で詳しく議論する．

1-II-2. 平面と平面条件 (p. 26 & p. 30)

- 三次元の平面条件と平面の方程式

二次元平面上の直線と同様に三次元空間での三つの点 U, V, W への位置ベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ を通る平面上に一ベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在する条件は平面条件と呼ばれる.

平面条件

$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ を通る平面上に存在するとき, ある定数 r, s, t が存在して,

$$\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{w} \tag{27}$$

と書け, $r + s + t = 1$ でなければならない.

平面上にある点の例として, が $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ の重心がある. 重心の座標 $\boldsymbol{g}$ は,

$$\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}}{3} \tag{28}$$

であるが, これは $r = 1/3$, $s = 1/3$, $t = 1/3$ で $r + s + t = 1$ を満たす.

平面の方程式を導出するため, 二次元直線と同様に, 平面に垂直なベクトル $\boldsymbol{a}$ を考える. それを作るためには, 平面と平行な二つのベクトル,

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u} \end{cases} \tag{29}$$

を考えこれらと垂直なベクトルを考えればよい. その候補としてこれらの外積が考えられる. つまり,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \times (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}) && (30) \\ &= \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} && (31) \\ &= \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u} && (32) \end{aligned}$$

である. これに, 式 (27) の両辺と内積を取ると,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} &= r(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) \cdot u + s(\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} + t(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} && (33) \\ &= (r + s + t)(\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})) && (34) \\ &= (\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})) && (35) \end{aligned}$$

ここでスカラー三重積 $(\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}))$ を b とおけば, 三元一次方程式

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = b \tag{36}$$

が得られる．この三元一次方程式で

$$b = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}_0 \tag{37}$$

として，

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0} \tag{38}$$

としたものが平面の方程式である．

このことから三元連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \tag{39}$$

の解はそれぞれの三元一次方程式上にあるので，結果的にそれらの表す平面の交点に対応することが分かる．この場合も垂直ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} \tag{40}$$

の一次独立性から，解が一意に決まるか同課が定まる．一次独立でなければ無限個あるか，解無しかになる．