補足 6　行列式の定義

1. ある n 次正方行列 $\hat{A}$ の行列式 $|\hat{A}|$ と余因子行列 $\tilde{A}$ を用いて

$$\hat{\tilde{A}}\hat{A} = |\hat{A}|\hat{I}_n \tag{108}$$

と書ける．もし, 行列式が 0 出なければ, 逆行列は

$$\hat{A}^{-1} = \frac{\hat{\tilde{A}}}{|\hat{A}|} \tag{109}$$

と書ける．行列式が 0 かどうかは逆行列の存在は同値である (定理 4.10).

注意: 行列式は 多変数積分の変数変換 などで重要な役割を果たす．必ずそれがなんであるかを理解すること.

2. 行列式の定義

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{110}$$

を n 次の順列とする.

n 次の順列の符号を $\mathrm{sgn}(\sigma)$ とする.

全ての n 次の順列の集合を P_n とする.

このとき行列 $\hat{A}$ の行列式 $|\hat{A}|$ は

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned} \tag{111}$$

3. n 次の順列

- n 次の順列 1 から n までの数,

$$1, 2, 3, \ldots n \tag{112}$$

を任意の順番に並べたもの

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{113}$$

と表し, それを 順列 と呼ぶ.

– 例 3 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{114}$$

この場合 $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(2) = 2$ である.

- n 次の基本順列

$$1, 2, 3, \ldots n \tag{115}$$

をその順番に並べた順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix} \tag{116}$$

は特別に <u>基本順列</u> と呼ぶ.

– 例 3 次の基本順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \tag{117}$$

- 順列の転位数

与えられた順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{118}$$

に対して,

$$i < j \quad \text{かつ} \quad \sigma(i) > \sigma(j) \tag{119}$$

となる i と j の対の数を <u>転位数</u> と呼ぶ. 転位数が偶数の順列を <u>偶順列</u>, 奇数の順列を <u>奇順列</u> と呼ぶ.

– 例 3 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{120}$$

の場合 $\sigma(1) = 3 > \sigma(2) = 1$, $\sigma(1) = 3 > \sigma(3) = 2$, $\sigma(2) = 1 < \sigma(3) = 2$ であるため転位数は 2 である. この順列は偶順列である.

- 順列の符号

順列 σ の <u>符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$</u> は以下の順列の関数である.

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma\text{が偶順列} \\ -1 & \sigma\text{が奇順列} \end{cases} \tag{121}$$

– 例 3 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{122}$$

の場合偶順列であるため $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ である.

- n 次順列の集合 P_n
  n 次の順列すべての集合を P_n と表す.
  また σ が P_n に属するとき,

$$\sigma \in P_n \tag{123}$$

  と表す.

  – 例 3 次の順列の集合

$$P_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \right. \tag{124}$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \tag{125}$$

  である. また, 3 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{126}$$

  は $\sigma \in P_3$ であるが, 2 次の順列

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{127}$$

  はは $\tau \notin P_3$ である.

4. 行列式の例

- 行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{128}$$

  の行列式は

$$\begin{aligned} \left|\hat{A}\right| &= \mathrm{sgn}((1,2,3))1 \times 1 \times 1 + \mathrm{sgn}((2,1,3))2 \times 0 \times 1 \\ &\quad + \mathrm{sgn}((3,2,1))1 \times 1 \times 0 + \mathrm{sgn}((1,3,2))1 \times 2 \times 2 \\ &\quad + \mathrm{sgn}((2,3,1))2 \times 2 \times 0 + \mathrm{sgn}((3,1,2))1 \times 0 \times 1 && (129) \\ &= \mathrm{sgn}((1,2,3))1 + \mathrm{sgn}((1,3,2))4 && (130) \\ &= 1 \times 1 + (-1) \times 4 = -3 && (131) \end{aligned}$$