

補足4 行列の演算

1. $m \times n$ 行列の記法

$$\hat{A} = (a_{ij}) \quad (60)$$

ここで a_{ij} は § 補足 2.2 で定義した i 行 j 列成分.

2. 行列の相等

$m \times n$ 行列 $\hat{A} = (a_{ij})$, $m \times n$ 行列 $\hat{B} = (b_{ij})$ に対して,

$$(a_{ij}) = (b_{ij}) \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j \quad (61)$$

• 例 (相等)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \quad (62)$$

• 例 (不等)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A} \neq \hat{B} \quad (63)$$

3. 行列の和

和は行列の行と列の数が同じものに対してのみ定義される.

$m \times n$ 行列 $\hat{A} = (a_{ij})$, $m \times n$ 行列 $\hat{B} = (b_{ij})$ に対して,

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \quad \forall i, j \quad (64)$$

• 例

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} &= \begin{pmatrix} 1+1 & 2+0 \\ 3+1 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (65)$$

4. 行列のスカラー倍

$l \times m$ 行列 $\hat{A} = (a_{ij})$ に対して,

$$k\hat{A} = k(a_{ij}) = (ka_{ij}) \quad \forall i, j \quad (66)$$

ただし $k = -1$ の場合,

$$(-1)\hat{A} = -\hat{A} \quad (67)$$

と省略する.

• 例

$$k=2, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 2\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 2 \times 3 & 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \quad (68)$$

5. 行列の積

二つの行列 A, B の積 AB は行列 A の列数と行列 B の行数が同じものに対してのみ定義される.

$l \times m$ 行列 $\hat{A} = (a_{ij})$, $m \times n$ 行列 $\hat{B} = (b_{ij})$ に対して,

$$\hat{A}\hat{B} = (a_{ij})(b_{jk}) = \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}b_{jk} \right) \quad \forall i, k. \quad (69)$$

積 AB の行数は必ず行列 A の行数, 列数は行列 B の列数となる.

B の列数が 1 の場合は積 AB は行列と列ベクトルの積であり, 結果的に答えの列数は 1 となる. 従って行列と列ベクトルの積は列ベクトルになる.

• 例

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \hat{A}\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 1 & 1 \times 0 + 2 \times 1 \\ 3 \times 1 + 4 \times 1 & 3 \times 0 + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \quad (70)$$

• 例

$$\hat{B}\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 3 & 1 \times 2 + 0 \times 4 \\ 1 \times 1 + 1 \times 3 & 1 \times 2 + 1 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad (71)$$

6. 零行列 \hat{O} $m \times n$ 行列 $\hat{O} = (o_{ij})$ が次の形を持つとき零行列とよぶ.

$$o_{ij} = 0 \quad \forall i, j \quad (72)$$

そして $l \times m$ 行列 \hat{A} と $n \times k$ 行列 \hat{B} に対して次の性質を満たす.

$$\hat{A}\hat{O} = \hat{O}' \quad (73)$$

$$\hat{O}\hat{B} = \hat{O}'' \quad (74)$$

ただし \hat{O}' は $l \times n$ 行列の零行列, \hat{O}'' は $m \times k$ 行列の零行列である.

7. n 次正方行列

\hat{A} が $n \times n$ 行列 $\Rightarrow \hat{A}$ は n 次正方行列

8. 行列の可換

n 次正方行列 \hat{A} と \hat{B} に対して

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} \quad (75)$$

• 例

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ は可換}$$

$$\text{実際, } \hat{A}\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ 0 \times 2 + 2 \times 0 & 0 \times 0 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 0 \times 0 & 2 \times 0 + 0 \times 2 \\ 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times 0 + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (76)$$

9. n 次単位行列 \hat{I}_n

n 次正方行列 \hat{I}_n が次の形を持つとき n 次単位行列とよぶ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (77)$$

そして n 次正方行列 \hat{A} に対して次の性質を満たす.

$$\hat{A}\hat{I}_n = \hat{I}_n\hat{A} = \hat{A} \quad (78)$$

• 例

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ に対して}$$

$$\hat{A}\hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 0 & 1 \times 0 + 2 \times 1 \\ 3 \times 1 + 4 \times 0 & 3 \times 0 + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A}$$

$$\hat{I}_2\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 3 & 1 \times 2 + 0 \times 4 \\ 0 \times 1 + 1 \times 3 & 0 \times 2 + 1 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \quad (79)$$

10. 行列の冪乗 \hat{A}^k 行列の冪乗は行列の積の定義から正方行列にのみ定義される. ある n 次正方行列 \hat{A} の k 回の積

$$\hat{A}^k = \overbrace{\hat{A} \cdot \hat{A} \cdot \hat{A} \cdots \hat{A}}^k \quad (80)$$

• 例

$$\begin{aligned}
 \hat{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ に対して} \\
 \hat{A}^3 &= \left(\hat{I}_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^3 \\
 &= \hat{I}_2^3 + 3\hat{I}_2^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\hat{I}_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^3 \\
 &= \hat{I}_2 + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{81}
 \end{aligned}$$

11. 転置行列

$m \times n$ 行列 $\hat{A} = (a_{ij})$ に対して,

$${}^t\hat{A} = (a_{ij}) \tag{82}$$

• 例

$$\begin{aligned}
 \hat{A} &= \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{4} & 5 & \boxed{6} \\ \boxed{7} & \boxed{8} & 9 \\ \boxed{10} & \boxed{11} & \boxed{12} \end{pmatrix}, \text{ に対して} \\
 {}^t\hat{A} &= \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{7} & \boxed{10} \\ \boxed{2} & 5 & \boxed{8} & \boxed{11} \\ \boxed{3} & \boxed{6} & 9 & \boxed{12} \end{pmatrix} \tag{83}
 \end{aligned}$$

12. 対称行列 \hat{T}

n 次正方行列 \hat{T} が以下を満たす.

$${}^t\hat{T} = \hat{T} \tag{84}$$

• 例

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{2} & 4 & \boxed{5} \\ \boxed{3} & \boxed{5} & 6 \end{pmatrix} \tag{85}$$

13. 交代行列 \hat{A}

n 次正方行列 \hat{A} が以下を満たす.

$${}^t\hat{A} = -\hat{A} \tag{86}$$

• 例

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \begin{pmatrix} 0 & -\boxed{1} & -\boxed{2} \\ \boxed{1} & 0 & -\boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{3} & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow {}^t \hat{A} &= \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & \boxed{2} \\ -\boxed{1} & 0 & \boxed{3} \\ -\boxed{2} & \boxed{3} & 0 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 0 & -\boxed{1} & -\boxed{2} \\ \boxed{1} & 0 & -\boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{3} & 0 \end{pmatrix} = -\hat{A} \end{aligned} \quad (87)$$