

演習 4 演習: 行列の演算と行列式

1. 次の行列 \hat{A} と \hat{B} の和を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. 次の行列 \hat{A} と \hat{B} の積を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. 次の行列 \hat{A} の三乗を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. 次の行列 \hat{A} と \hat{B} に対して,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

\hat{P} が

$$\hat{P}\hat{A} = \hat{B}$$

を満たすとき, 行列 \hat{P} を与えよ.

5. 次の行列 \hat{A} の逆行列 \hat{A}^{-1} を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 6 \\ 1 & 7 & -1 \\ 2 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. 次の行列 \hat{A} の行列式 $|\hat{A}|$ を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. 次の行列 \hat{A} と \hat{B} の積の行列式 $|\hat{A}\hat{B}|$ を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

ヒント: 行列の積の行列式の性質と問題 6 の結果を使うと楽.

8. 次の行列 \hat{A} の三乗の行列式を $|\hat{A}^3|$ を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ヒント: 行列の積の行列式の性質と行列式の多重線形性, 問題 7 の途中結果を使うと楽.

9. 次の行列 \hat{A} の行列式余因子 \tilde{a}_{13} と \tilde{a}_{32} を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 6 \\ 1 & 7 & -1 \\ 2 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. 次の行列 (直行行列もしくは回転行列) $\hat{R}(\theta)$

$$\hat{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

に対して次の四つの計算をせよ.

(a) $|\hat{R}(\theta)|$

ヒント: ピタゴラスの定理 $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

(b) $\hat{R}(\theta)\hat{R}(-\theta)$

ヒント: \sin は奇関数, \cos は偶関数

(c) $\hat{R}(\theta)^t \hat{R}(\theta)$

ヒント: 転置した後に $\hat{R}(-\theta)$ と見比べよ.

(d) $\hat{R}(\theta)^{-1}$

ヒント: (b), (c) から推測できる