線形代数 I (担当 松下勝義)

III. 行列の演算

教科書 §3.1-3.6, pp.29–46

講義ノート

ここまで行列と連立一次方程式の対応関係についてみてきた．この行列には連立一次方程式との関係を崩さず和や掛け算が定義できる．これ以降簡単のため 2 行 2 列の行列に絞って話す．

- 行列の和例えばもし行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{143}$$

を考えたときに

$$\hat{A} = \hat{B} + \hat{C} \tag{144}$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{145}$$

のときは, 連立一次方程式

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{146}$$

は

$$\hat{B}\boldsymbol{x} + \hat{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{147}$$

とあらゆる $\boldsymbol{b}$ に対して同じになる，　という意味で

$$\hat{A} = \hat{B} + \hat{C} \tag{148}$$

という和が定義できる．この和は成分で書くと

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{pmatrix} \tag{149}$$

とすれば成立する．　つまり, 成分毎の和を計算すればよい．この計算から行列の和は行と列の数が一致している場合のみ可能であることが分かる．実際上の例の場合,

$$\hat{B} + \hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{150}$$

である．

• 行列の積

$$\hat{A} = \hat{B}\hat{C} \tag{151}$$

としたとき, 連立一次方程式では

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{152}$$

と

$$\hat{D}\hat{E}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{153}$$

があらゆる $\boldsymbol{b}$ に対して同じである. そのためには, 次のように行列の積を定義する.

$$\hat{D}\hat{E} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}e_{11} + d_{12}e_{21} & d_{11}e_{12} + d_{12}e_{22} \\ d_{21}e_{11} + d_{22}e_{21} & d_{21}e_{12} + d_{22}e_{22} \end{pmatrix} \tag{154}$$

次の例を考えよう

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{155}$$

とすると

$$\hat{D}\hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 0 & 1 \times 2 + 0 \times 0 \\ 2 \times 1 + 1 \times 0 & 2 \times 2 + 0 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{156}$$

注意！

$$\hat{E}\hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times 0 + 2 \times 1 \\ 0 \times 2 + 0 \times 2 & 0 \times 0 + 0 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A \tag{157}$$

従って

$$\hat{D}\hat{E} \neq \hat{E}\hat{D} \tag{158}$$

である. 一般に行列の積は可換

$$\hat{D}\hat{E} = \hat{E}\hat{D} \tag{159}$$

は成立しない.

また行列の積にも定数の積の 1 に対応するものが存在して単位行列と呼ぶ. 2 行 2 列の行列の場合は

$$\hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{160}$$

実際

$$\hat{I}_2 \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 2 & 1 \times 2 + 0 \times 4 \\ 0 \times 2 + 1 \times 2 & 0 \times 2 + 1 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{161}$$

かつ

$$\hat{A} \hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times 0 + 2 \times 1 \\ 2 \times 0 + 4 \times 1 & 2 \times 0 + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{162}$$

となり左から掛けても右から掛けても元の行列 $\hat{A}$ になる.

- スカラー倍行列の定数 k 倍を

$$k\hat{A} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix} \tag{163}$$

とする例えば $k = 2$ とすると

$$2\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 2 \times 2 & 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \tag{164}$$