

線形代数 II 第六回 (担当 松下勝義)

8-2. 行列の対角化 (11/28, p.158)

1. 対角化の概要 (復習) 行列 \hat{A} の対角化

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\Lambda}_F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{d-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_d \end{pmatrix} \quad (204)$$

を基底の取り換え

$$\mathbf{v}' = \hat{P}^{-1}\mathbf{v} \quad (205)$$

$$\hat{\Lambda}_F = \hat{P}^{-1}\hat{F}\hat{P} \quad (206)$$

のできる. このとき,

対角化 $\hat{P}^{-1}\hat{A}\hat{P} = \hat{\Lambda}$

$$\begin{cases} \text{基底ベクトル } (\hat{P} \text{ の列ベクトル}) & = \text{固有ベクトル } \mathbf{u}_i \\ \text{対角行列 } (\hat{\Lambda}_F) \text{ の成分} & = \text{固有値 } \lambda_i \end{cases} \quad (207)$$

である.

2. 対角化と対角化可能条件 (対角化の説明, 定理 8.3)

- 対角化

対角化での基底の取り換え

対角化

$$\hat{P}^{-1}\hat{A}\hat{P} = \hat{\Lambda} \quad (208)$$

の基底の取り換えのための行列 \hat{P} は \hat{A} の固有ベクトルを $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ としたとき

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \quad (209)$$

で与えられる.

2次正方行列 \hat{A}

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (210)$$

の2つの固有値を

$$\lambda_1, \quad \lambda_2 \quad (211)$$

と固有ベクトルを

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} \quad (212)$$

とする。このとき

$$\hat{A}(\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2) = (\lambda_1 \mathbf{u}_1 \quad \lambda_2 \mathbf{u}_2) \quad (213)$$

である。式の右辺は、

$$(\lambda_1 \mathbf{u}_1 \quad \lambda_2 \mathbf{u}_2) = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (214)$$

従って、

$$\hat{A}(\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2) = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (215)$$

ここで

$$\hat{P} = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (216)$$

とおくと、

$$\hat{A}\hat{P} = \hat{P}\hat{\Lambda} \quad (217)$$

\hat{P} が正則であれば \hat{P}^{-1} が存在し、

$$\hat{P}^{-1}\hat{A}\hat{P} = \hat{\Lambda} \quad (218)$$

以上のことから対角化可能な条件は

対角化可能条件

\hat{A} が対角化可能 $\Leftrightarrow \hat{P} = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_n)$ が正則.

- 連立一次方程式への応用.
線形写像 $f(x(t))$ に対する方程式

$$f(x(t)) = x(t+1) \quad (219)$$

に対して,

$$\mathbf{x}(t+n) = \mathbf{b} \quad (220)$$

を満たす $x(t)$ を求めたいとする. このとき $f(x(t))$ の表現行列 \hat{F} をつかって,

$$\hat{F}^n \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (221)$$

を解が満たす. この問題は \hat{F} を対角化,

$$\mathbf{x}' = \hat{P}^{-1} \mathbf{x} \quad (222)$$

$$\mathbf{b}' = \hat{P}^{-1} \mathbf{b} \quad (223)$$

$$\Lambda = \hat{P}^{-1} \hat{F} \hat{P} \quad (224)$$

を考えたとき,

$$\Lambda^n \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \lambda_1^n x'_1 \\ \lambda_2^n x'_2 \\ \vdots \\ \lambda_d^n x'_d \end{pmatrix} = \mathbf{b}' \quad (225)$$

となるから,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{b'_1}{\lambda_1^n} \\ \frac{b'_2}{\lambda_2^n} \\ \vdots \\ \frac{b'_d}{\lambda_d^n} \end{pmatrix} \quad (226)$$

と解ける.

- 対角化可能性 (定理 8.3, P.160)
対角化可能な場合は \hat{P} が正則であることが必要. このときベクトル

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \quad (227)$$

を考えたとき, 線形関係

$$\hat{P} \mathbf{k} = k_1 \mathbf{u}_1 + k_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}. \quad (228)$$

を考えた場合, \hat{P} が正則なため, \mathbf{k} は零ベクトルのみが解を持つ。
つまり,

定理 8.3

定理 8.3

n 次正方行列 \hat{A} の対角化可能であるための必要条件:
 \hat{A} が n 個の一次独立な固有ベクトルを持つ。

3. 幾つかの例 (p.160 例題 8.5(8.2), 8.8(対角化不能な例))

- 例題 8.4(p. 159)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (229)$$

このとき固有値 2 のとき,

$$\lambda_2 \hat{A} \mathbf{u} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \quad (230)$$

従って

$$-2u_1 = u_2 \rightarrow \mathbf{u}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (231)$$

ただし c_2 は任意定数.

固有値 5 のとき,

$$\lambda_5 \hat{A} \mathbf{u}_5 - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{u}_5 = \mathbf{0} \quad (232)$$

$$u_1 = u_2 \rightarrow \mathbf{u}_5 = c_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (233)$$

ただし c_5 は任意定数. このとき対角化した行列 Λ は

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad (234)$$

で基底の取り換え \hat{P} は

$$\hat{P} = (\mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (235)$$

実際,

$$\hat{P}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (236)$$

を使って,

$$\begin{aligned} \hat{P}^{-1} \hat{A} \hat{P} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (237)$$

- 対角化できない例 (p.162, 例題 8.7)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (238)$$

固有方程式は,

$$\begin{vmatrix} \lambda - 4 & -9 \\ 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3\lambda - 3 \\ 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 \quad (239)$$

固有ベクトルは

$$\begin{cases} -3u_1 - 9u_2 = 0 \\ u_1 + 3u_2 = 0 \end{cases} \quad (240)$$

で

$$\mathbf{u} = c \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (241)$$

一つしかなく, 対角化できない.