線形代数 II 第五回 (担当 松下勝義)

8-0. 固有値と固有ベクトルの導入

線形写像 f の表現行列 $\hat{F}$ の対応を作りたい.
線形写像 f が決まっても基底が異なれば表現行列は異なる. 一意に定まる対応関係とは？

もし線形写像 f の表現行列 $\hat{F}$ がある基底の取り換えで対角行列 $\hat{\Lambda}_{\hat{F}}$ にできればその対角行列は線形写像 f に対して一意に決まる. そのような対角行列は, 行列の対角化

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{d-1} & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_d & \end{pmatrix} = \hat{\Lambda}_F \tag{173}$$

を基底の取り換え

$$\hat{\Lambda}_F = \hat{P}^{-1}\hat{F}\hat{P} \tag{174}$$

を行えば作れることになる. 今回の授業はこの行列の対角化を学習する.

この表現行列の対角化は以下の応用がある. 表現行列を対角化する基底で行列とベクトルへの n 回の積を考えると,

$$\hat{F}^n \boldsymbol{v} \tag{175}$$

の計算は

$$\boldsymbol{v}' = \hat{P}^{-1}\boldsymbol{v} \tag{176}$$

$$\hat{\Lambda}_F^n \boldsymbol{v}' \tag{177}$$

の計算になる. $\hat{\Lambda}_F^n$ は以下のように簡単に計算できる,

$$\Lambda_{\hat{F}}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{d-1}^n & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_d^n & \end{pmatrix} \tag{178}$$

そのため著しく計算量を下げることができる.

対角行列を計算するのに基底の取り換えをする必要がある. このときどのような基底をとれば対角行列 $\hat{\Lambda}$ を作れるかを考える. このとき答えは以下のようになる.

対角化 $\hat{P}^{-1}\hat{A}\hat{P} = \hat{\Lambda}$

$$\begin{cases} \text{基底ベクトル} \ (\hat{P}\text{の列ベクトル}) & = \text{固有ベクトル} \ \boldsymbol{u}_i \\ \text{対角行列} \ (\hat{\Lambda}_F) \ \text{の成分} & = \text{固有値}\lambda_i \end{cases} \tag{179}$$

8-1. 固有値と固有ベクトル (11/14, 130 分, p. 153)

1. 固有値と固有ベクトルの定義

- 固有ベクトルと固有値の定義

固有ベクトルと固有値

行列 $\hat{A}$ の固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ と固有値 λ とは,

$$\hat{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} \tag{180}$$

を満たす物である.

- ex. 例題 8.1(p.154)

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{181}$$

このとき固有値は 2, 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{182}$$

2. 固有値の求め方: 固有方程式

- 固有方程式

固有方程式

行列 $\hat{A}$ に対する固有方程式とは

$$\left|\lambda \hat{I} - \hat{A}\right| = 0 \tag{183}$$

である. $\hat{I}$ は単位行列.

固有値の定義を変形すると

$$\left(\lambda \hat{I} - \hat{A}\right) \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{184}$$

これが $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ 以外に解を持つ λ を求めればそれが固有値.
解を持つ条件は $\lambda \hat{I} - \hat{A}$ が正則ではない.
つまり

$$\left|\lambda \hat{I} - \hat{A}\right| = 0 \tag{185}$$

これを固有方程式と呼ぶ. この式を λ に対して解けば固有値が求まる.

- 例 例題 8.1

$$\left|\lambda \hat{I} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \tag{186}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -\lambda + 2 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \tag{187}$$

$$= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \tag{188}$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0 \tag{189}$$

従って固有値は 2 と 5.

3. 固有ベクトルの求め方

固有ベクトルの求め方

以下の流れで固有ベクトルが求まる.

(a) 固有方程式

$$\left|\lambda\hat{I}-\hat{A}\right|=0 \tag{190}$$

を解いて固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ を求める.

(b) それぞれの λ_i に対して,

$$\left(\lambda_i\hat{I}-\hat{A}\right)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \tag{191}$$

を解いて固有値 λ_i に対する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ を求める.

- 例題 8.1 固有値 λ_1=2 のとき,

$$\lambda_1\hat{I}\boldsymbol{u}_1-\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{0} \tag{192}$$

もし $\boldsymbol{u}_1$ を

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}u_{11}\\ u_{21}\end{pmatrix} \tag{193}$$

と置けば,

$$-2u_{11}=-u_{21}\rightarrow\boldsymbol{u}_1=c_1\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix} \tag{194}$$

ただし c_2 は任意定数で $u_{11}=c_1$ とした.

- 例題 8.1 固有値 $\lambda_2=5$ のとき,

$$\lambda_2\hat{I}\boldsymbol{u}_2-\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{0} \tag{195}$$

もし $\boldsymbol{u}_2$ を

$$\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}u_{12}\\ u_{22}\end{pmatrix} \tag{196}$$

と置けば,

$$u_{12}=u_{22}\rightarrow\boldsymbol{u}_2=c_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \tag{197}$$

ただし c_2 は任意定数で $u_{12}=c_2$ と置いた.

4. 固有ベクトルの一次独立性

> 異なる固有値の固有ベクトルの一次独立性 (一次独立性, 定理 8.2)
>
> 値の異なる固有ベクトル同士は一次独立

2 次の正方行列 $\hat{A}$ の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ 線形関係

$$k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0} \tag{198}$$

左から $\hat{A}$ を掛けると

$$k_1\lambda_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\lambda_2\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0} \tag{199}$$

二式から $\boldsymbol{u}_1$ を消すと,

$$k_2(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0} \tag{200}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば上が成立するのは $k_2 = 0$ のときのみ. 同様に $\boldsymbol{u}_2$ を消すと $k_1 = 0$ が得られる.

5. 固有ベクトルによる基底と対応する表現行列

n 次正方行列の固有ベクトルが n 個あるとする, すべての固有値同士が

$$\lambda_i \neq \lambda_j \tag{201}$$

であればすべての固有ベクトルは一次独立. すべての固有値が異なれば n 次元ベクトル空間の基底になる. もし同じ固有値の固有ベクトル, があればそれらが独立になるように適切に固有ベクトルの線形結合を選べばそれらも同じ固有値の固有ベクトルになるので基底を作れる.
線形写像 f を考える. その表現行列に対してこのように固有ベクトルから作れた基底ではそれぞれの基底ベクトルは

$$\hat{F}\boldsymbol{u}_i = \lambda_i\boldsymbol{u}_i \tag{202}$$

となる. つまりそれらの基底での線形写像を考えれば, $f(\boldsymbol{u}_i) = \lambda_1\boldsymbol{u}_i$ となるため, その表現行列は対角行列となり,

$$\Lambda_{\hat{F}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{203}$$

となる.