

線形代数 II (担当 松下勝義)

演習 6. (行列の対角化)

- 演習 6-1 次の対称行列 \hat{S}

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (202)$$

について以下の問いに答えよ.

- (1) この行列の固有値と固有ベクトルをすべて与えよ. ただし, 固有ベクトルは正規化せよ.
- (2) 二つの固有ベクトル u と v が直交しているか判定せよ. またそれぞれ図示せよ. 図示する場合は各軸の目盛りは $1/\sqrt{5}$ 単位にとって良い.
- (3) この行列が対角化可能か判定せよ.
- (4) u と v を二次元ベクトル空間の基底とできるか答えよ.
- (5) この行列を対角化した行列 $\hat{\Lambda}$ を与えよ. さらにこれを対角化

$$\hat{\Lambda} = \hat{O}^t \hat{S} \hat{O} \quad (203)$$

のための直交行列 \hat{O} (つまり $\hat{O}^t = \hat{O}^{-1}$ が成立する) を与えよ. ただし \hat{O} が直交行列であることは計算して示せ.

- (6) 標準基底でのベクトル $a=(2, -2)$ に対して, $\hat{S}^5 a$ を与えよ. ヒント: \hat{S}^5 の計算よりも $\hat{\Lambda}^5$ の計算の方が簡単にできる.