線形代数 I (担当 松下勝義)

I. 連立一次方程式と行列

教科書 §2.1-2.2, pp.9–16

講義ノート

連立 1 次方程式は行列と数ベクトルで表現することができる. 連立 1 次方程式は消去法で解くことができるが, 行列でもそれは再現できる. 今回はこの行列による方程式の表現と, 消去法に対応する掃き出し法を説明する.

- 連立一次方程式

$$\begin{cases} x & -2y & -3z & = & 4 \\ 2x & +3y & +4z & = & 4 \\ 3x & -4y & -7z & = & 10 \end{cases} \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

- 連立一次方程式の行列とベクトルによる表現 (例題 2. 2)
  係数行列 $\hat{A}$(今後 $\wedge$ がついた文字は行列とする.)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

  ベクトル (今後太文字をベクトルとする),

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \tag{4}$$

  を使って

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{5}$$

- 行列とベクトルの掛け算
  3 行 3 列行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{6}$$

とベクトル $\boldsymbol{x}$ を

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \times x + a_{12} \times y + a_{13} \times z \\ a_{21} \times x + a_{22} \times y + a_{23} \times z \\ a_{31} \times x + a_{32} \times y + a_{33} \times z \end{pmatrix} \tag{7}$$

とする.
例題 2.2 では

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \times x + (-2) \times y + (-3) \times z \\ 2 \times x + 3 \times y + 4 \times z \\ 3 \times x + (-4) \times y + (-7) \times z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y - 3z \\ 2x + 3y + 4z \\ 3x - 4y - 7z \end{pmatrix} \tag{9}$$

- ベクトルの同値
  二つの 3 次数ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

を考えたとき, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 & = b_1 \\ a_2 & = b_2 \\ a_3 & = b_3 \end{cases}. \tag{11}$$

従って,

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - 2y - 3z \\ 2x + 3y + 4z \\ 3x - 4y - 7z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 3z & = & 4 \\ 2x + 3y + 4z & = & 4 \\ 3x - 4y - 7z & = & 10 \end{cases} \tag{13}$$

- 行列の用語
  - 行: 横の数字の並び $\hat{A}$ の 2 行目の行ベクトル $\boldsymbol{a}_2$

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{14}$$

– 列: 縦の数字の並び $\hat{A}$ の 2 列目の列ベクトル $\boldsymbol{a}_2$

$$\boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \tag{15}$$

– 成分: 成分 $\hat{A}$ の 2 行 2 列成分 a_{22}

$$a_{22} = 3 \tag{16}$$

- 消去法による連立一次方程式の解法
三つの連立一次方程式の**基本変形**で未知数を消去して解を求める．三つの操作とは

  1. 1 つの方程式に 0 でない定数を掛ける
  2. 1 つの方程式の定数倍を他の方程式に掛ける
  3. 2 つの方程式を入れ替える

  例題 2.2 の場合は補足 1 を参照.
  この解法は係数の操作のみで行えることに注意すれば行列でも同様に解くことができる．この消去法を行列で行うため次の連立一次方程式 $\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列を考える

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

  例題 2.2 では

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \tag{18}$$

  この行列に対してやはり基本変形で解を求める.
  連立一次方程式に対応する行列の基本変形は以下の三つの行基本変形である.

  1. 1 つの行に 0 でない定数を掛ける
  2. 1 つの行の定数倍を他の行に掛ける
  3. 2 つの行を入れ替える

この三つの操作で $\hat{A}$ の部分を 3 行 3 列の単位行列

$$\hat{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

へ変形する, 1 行目の-2 倍を 2 行目へ足す.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 10 & -4 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \tag{20}$$

1 行目の-3 倍を 3 行目へ足す.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 10 & -4 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 10 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

3 行目の 0.5 倍する.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 10 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 10 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

2 行目と 3 行目を入れ替える.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 10 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 10 & -4 \end{pmatrix} \tag{23}$$

2 行目の 2 倍を 1 行目へ足す.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 10 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 10 & -4 \end{pmatrix} \tag{24}$$

2 行目の-7 倍を 3 行目へ足す.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 10 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \tag{25}$$

3 行目の 1/3 倍する.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

3 行目の 1 倍を 1 行目へ足す.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

3 行目の-1 倍を 2 行目へ足す.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

ここから

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \hat{A} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \tag{29}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{30}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

より答えは

$$\begin{cases} x & = 3 \\ y & = -2 \\ z & = 1 \end{cases} \tag{32}$$

線形代数 I (担当 松下勝義)

レポート I

- 問題 I–1
次の連立一次方程式
$$\begin{cases} 2x - y & = 1 \\ 3x - 5y & = 5 \end{cases} \tag{33}$$
に対して,
  - (a) の係数行列 $\hat{A}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ と
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{34}$$
を使って $\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表せるとき, $\hat{A}$ と $\boldsymbol{b}$ を答えよ.
  - (b) 拡大係数行列 $(\hat{A} \quad \boldsymbol{b})$ を求めよ.
  - (c) 拡大係数行列で連立一次方程式の解を求めよ. またその時の行基本変形の手順も示せ.
- 問題 I–2 次の行列 $\hat{A}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の積 $\hat{A}\boldsymbol{b}$ を答えよ.
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{35}$$
- 問題 I–3 次の行列 $\hat{A}$
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \tag{36}$$
について次のものを答えよ.
  1. 1 行目の行ベクトル
  2. 2 列目の列ベクトル
  3. 2 行 1 列成分

レポートIの答え

- 問題 I–1

  - I-1-(a)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{37}$$

  - (b)

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \end{pmatrix} \tag{38}$$

を求めよ.

  - (c)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \tag{39}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{40}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \tag{41}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{42}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$\tag{44}$$

従って答えは

$$\begin{cases} x & = 0 \\ y & = -1 \end{cases} \tag{45}$$

- 問題 I–2 次の行列 $\hat{A}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の積 $\hat{A}\boldsymbol{b}$ を答えよ.

$$\hat{A}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 1 \times 1 \\ 1 \times 2 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{46}$$

- 問題 I–3

  1.

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{47}$$

2. 2 列目の列ベクトル

$$\boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{48}$$

3. 2 行 1 列成分

$$a_{21} = 4 \tag{49}$$

線形代数 I (担当 松下勝義)

演習 1

- 問題 1–1
  以下の連立一次方程式

$$\begin{cases} x & +2y & -z & = 2 \\ x & -y & & = 0 \\ & y & +z & = 2 \end{cases} \tag{50}$$

  に対して

  – (a) の係数行列 $\hat{A}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ と

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{51}$$

  を使って $\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表せるとき, $\hat{A}$ と $\boldsymbol{b}$ を答えよ.

  – (b) 拡大係数行列 $(\hat{A} \quad \boldsymbol{b})$ を求めよ.

  – (c) 拡大係数行列で連立一次方程式の解を求めよ. またその時の行基本変形の手順も示せ.

- 問題 2–1 次の行列 $\hat{A}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の積 $\hat{A}\boldsymbol{b}$ を答えよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{52}$$

- 問題 1–3 次の行列 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{53}$$

  について次のものを答えよ.

  1. 2 行目の行ベクトル
  2. 3 列目の列ベクトル
  3. 2 行 2 列成分

演習 I の答え

- 問題 1–1

  – 1-1-(a)

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} \tag{54}$$

  – (b)

$$\begin{pmatrix}\hat{A} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \tag{55}$$

  – (c)

$$\begin{pmatrix}\hat{A} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & -3 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \tag{56}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -3 & 1 & -2\end{pmatrix} \tag{57}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 4 & 4\end{pmatrix} \tag{58}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \tag{59}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \tag{60}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \tag{61}$$

  従って答えは

$$\begin{cases}x & =1\\ y & =1\\ z & =1\end{cases} \tag{62}$$

- 問題 1–2 次の行列 $\hat{A}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の積 $\hat{A}\boldsymbol{b}$ を答えよ.

$$\hat{A}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 3 \\ 1 \times 2 + 1 \times 1 + 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} \tag{63}$$

- 問題 1–3

1.

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{64}$$

2. 2 列目の列ベクトル

$$\boldsymbol{c}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{65}$$

3. 2 行 1 列成分

$$a_{22} = 3 \tag{66}$$

線形代数 I (担当 松下勝義)

教科書 §2.3-2.4, pp.13–26

II. 行列の階数と階段行列, 連立方程式の解

講義ノート

連立一次方程式は解が一意に定まるとは限らない. 場合によっては解が ∞ 個ある場合や, 解がない場合が存在する. これらの場合でも係数行列 $\hat{A}$ は階段行列に行基本変形で変形できる. そしてそれを利用し解を求めることができる. 今回はこれらの場合の行列による解法を述べる.

- 階段行列次のような行列を階段行列と呼ぶ. ピボットという値が 1 の成分が存在しそれが以下の条件を満たす.
  1. ピボットがない行のすべての成分は 0
  2. ピボットより左にある成分はすべて 0
  3. ピボットのある列の列番号を p_i としピボットを含む行の数を r ($< m$ で m は行列の行の数) とすると
  $$p_1 < p_2 < \cdots < p_{r-1} < p_r. \tag{67}$$
  そして各ピボットを含む列ベクトルの成分はピボット以外で 0.
- 基本変形による階段行列への変形と階数
  行列 $\hat{A}$ は行基本変形で階段行列 $\hat{B}$ に変形できる. このとき階段行列のピボットの数 r を $\mathrm{rank}(\hat{A})$ と書き行列の階数と呼ぶ.
- 拡大係数行列の係数行列 $\hat{A}$ の列数 n と階数 r に対して以下が成り立つ. 行基本変形で係数行列が階段行列 $\hat{B}$ とベクトル $\boldsymbol{d}$ からなる拡大係数行列へ変形できたとする.
  $$\begin{pmatrix} \hat{A} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{B} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \tag{68}$$
  - $d_{r+1} = \ldots\ d_n = 0$ ではない. $\Rightarrow$ 解なし
  - $d_{r+1} = \ldots\ d_n = 0$ かつ $r{=}n$ 解が一つ存在する.
  - $d_{r+1} = \ldots\ d_n = 0$ かつ $r < n$ 解が ∞ 個あり未定定数 $n - r$ 個で書ける.

- 解が一意に定まる場合 (例題 2.4(1))
  連立一次方程式

$$\begin{cases} x & -2y & -3z & = & 4 \\ 2x & +3y & +4z & = & 4 \\ 3x & -4y & -7z & = & 10 \end{cases} \tag{69}$$

拡大係数行列の係数行列を行基本変形で階段行列へ変形する.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \tag{70}$$

この場合階段行列は単位行列 $\hat{I}_3$ になり, $\boldsymbol{d}$ の 0 ではない成分の数は 3, r も階数 (ピボット数) が 3 であり d_4 等はなく 0 とみなしてよい. 列の数 3 であるから解が一意であることがわかる.

- 解が無限に存在する場合 (例題 2.4(2))

$$\begin{cases} x & -2y & -3z & = & 4 \\ 2x & +3y & +z & = & 1 \\ 3x & -4y & -7z & = & 10 \end{cases} \tag{71}$$

拡大係数行列の係数行列を行基本変形で階段行列へ変形する.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \tag{72}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \tag{73}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \tag{74}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{75}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{76}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{77}$$

より $d_n \neq 0$ の数がピボットの数 $r=2$ と一致している．また列の数 n は 3 で解が ∞ 個あり未知定数 c 一つで解が書けることが分かる．z=c とすると

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{78}$$

より

$$\begin{cases} x - c = 2 \\ y + c = -1 \end{cases} \tag{79}$$

となる．よって解は

$$\begin{cases} x = 2 + c \\ y = -1 - c \\ z = c \end{cases} \tag{80}$$

である．

- 解が存在しない場合 (例題 2.4(3))

$$\begin{cases} x & -2y & -3z & = & 4 \\ 2x & +3y & +z & = & 4 \\ 3x & -4y & -7z & = & 10 \end{cases} \tag{81}$$

拡大係数行列の係数行列を行基本変形で階段行列へ変形する.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -4 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \tag{82}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \tag{83}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{84}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 7 & -4 \end{pmatrix} \tag{85}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{86}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{87}$$

より $d_n \neq 0$ の数が 3 で階数 (ピボットの数)$r = 2$ より大きい. そのため解はない. 実際解 (x, y ,z) が存在するとすると,

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{88}$$

より

$$\begin{cases} x - z = 2 \\ y + z = -1 \\ 0 = 3 \end{cases} \tag{89}$$

となるため最後の式が矛盾してしまう.

線形代数 I (担当 松下勝義)

レポート II

以下の連立一次方程式に対して, 拡大係数行列を基本変形し, 係数行列の階数を求め, 解があるかを判定せよ. ある場合はその解を与えよ.

- レポート問題 II–1.

$$\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ 3x + 4y = 3 \end{cases} \tag{90}$$

- レポート問題 II–2.

$$\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ 3x + 4y = 3 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \tag{91}$$

- レポート問題 II–3.

$$\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ 4x + 4z = 4 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \tag{92}$$

レポート II の答え

- レポート問題 II–1. 拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \tag{93}$$

を基本変形し係数行列を階段行列にすると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} &(94)\\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} &(95)\\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} &(96)\\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} &(97) \end{aligned}$$

よって列の数と階数は共に 2 であり解が一意に存在する. その解は拡大係数行列と連立一次方程式の対応から,

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \tag{98}$$

である.

- レポート問題 II–2. 拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \tag{99}$$

を基本変形し係数行列を階段行列にすると,

$$\begin{pmatrix}2 & -4 & 2\\ 3 & 4 & 3\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & 3\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix} \tag{100}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix} \tag{101}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \tag{102}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \tag{103}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \tag{104}$$

よって階数が 2 のところを $d_3 = 2 \neq 0$ があり, 解は存在しない.

- 演習問題 II–3. 拡大係数行列

$$\begin{pmatrix}2 & -4 & 0 & 2\\ 4 & 0 & 4 & 4\\ 1 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix} \tag{105}$$

を基本変形し係数行列を階段行列にすると,

$$\begin{pmatrix}2 & -4 & 0 & 2\\ 4 & 0 & 4 & 4\\ 1 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 4 & 4\\ 1 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix} \tag{106}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 8 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix} \tag{107}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 8 & 4 & 0\\ 0 & 4 & 2 & 0\end{pmatrix} \tag{108}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 4 & 2 & 0\end{pmatrix} \tag{109}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{110}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{111}$$

従って階数は 2 で d_3=0 であるので解は存在する. 係数行列の列数 n=3 より階数が小さく $n-r$=1 となるため未知数一つで解が書ける. z=c とおくと

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \tag{112}$$

より, 解は

$$\begin{cases} x = 1 - c\\ y = \frac{1}{2}\\ z = c\end{cases} \tag{113}$$

である.

線形代数 I (担当 松下勝義)

演習 2

以下の連立一次方程式に対して, 拡大係数行列を基本変形し, 係数行列の階数を求め, 解があるかを判定せよ. ある場合はその解を与えよ.

- 演習問題 2–1.

$$\begin{cases} -2x - 4y + 2z = 2 \\ 3x + 6y = 3 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases} \tag{114}$$

- 演習問題 2–2.

$$\begin{cases} -2x - 4y + 2z = 2 \\ 3x + 6y = 3 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \tag{115}$$

- 演習問題 2–3.

$$\begin{cases} -2x - 4y + 2z = 2 \\ 3x + 6y = 3 \\ x + 2y + 2z = 5 \end{cases} \tag{116}$$

演習 2 の答え

- 演習問題 2–1. 拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{117}$$

を基本変形し係数行列を階段行列にすると,

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{118}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{119}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \tag{120}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \tag{121}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{122}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{123}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{124}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{125}$$

よって列の数と階数は共に 3 であり解が一意に存在する．その解は拡大係数行列と連立一次方程式の対応から,

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases} \tag{126}$$

である.

- 演習問題 2–2. 拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{127}$$

を基本変形し係数行列を階段行列にすると,

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{128}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{129}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \tag{130}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{131}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{132}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{133}$$

よって階数が 2 のところを $d_3 = 1 \neq 0$ があり, 解は存在しない.

- 演習問題 II–3. 拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \tag{134}$$

を基本変形し係数行列を階段行列にすると,

$$\begin{pmatrix}-2 & -4 & 2 & 2\\ 3 & 6 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 5\\ -2 & -4 & 2 & 2\\ 3 & 6 & 0 & 3\end{pmatrix} \tag{135}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 6 & 12\\ 3 & 6 & 0 & 3\end{pmatrix} \tag{136}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 6 & 12\\ 0 & 0 & -6 & -12\end{pmatrix} \tag{137}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -6 & -12\end{pmatrix} \tag{138}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{139}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{140}$$

従って階数は 2 で $d_3{=}0$ であるので解は存在する．係数行列の列数 $n{=}3$ より階数が小さく $n-r{=}1$ となるため未知数一つで解が書ける．$y{=}c$ とおくと

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ c\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\ 2\\ 0\end{pmatrix} \tag{141}$$

より, 解は

$$\begin{cases} x = -2 - 2c\\ y = c\\ z = 2 \end{cases} \tag{142}$$

である.

線形代数 I (担当 松下勝義)

III. 行列の演算

教科書 §3.1-3.2, pp.29–32

講義ノート

ここまで行列と連立一次方程式の対応関係についてみてきた．この行列には連立一次方程式との関係を崩さず和や掛け算が定義できる．これ以降簡単のため 2 行 2 列の行列に絞って話す．

- 行列の和連立一次方程式

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{143}$$

は

$$\hat{B}\boldsymbol{x} + \hat{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{144}$$

とあらゆる $\boldsymbol{b}$ に対して同じになる，　という意味で

$$\hat{A} = \hat{B} + \hat{C} \tag{145}$$

という和が定義できる．この和は成分で書くと

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{146}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}x + b_{12}y \\ b_{21}x + b_{22}y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11}x + c_{12}y \\ c_{21}x + c_{22}y \end{pmatrix} \tag{147}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}x + c_{11}y + b_{12}x + c_{12}y \\ b_{21}x + c_{21}y + b_{22}x + c_{22}y \end{pmatrix} \tag{148}$$

$$= \begin{pmatrix} (b_{11} + c_{11})x + (b_{12} + c_{12})y \\ (b_{21} + c_{21})x + (b_{22} + c_{22})y \end{pmatrix} \tag{149}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{150}$$

より

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{pmatrix} \tag{151}$$

とすれば成立する.　つまり, 成分毎の和を計算すればよい. この計算から行列の和は行と列の数が一致している場合のみ可能であることが分かる.

例えばもし行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{152}$$

を考えたときに

$$\hat{A} = \hat{B} + \hat{C} \tag{153}$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{154}$$

のときは,

$$\hat{B} + \hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{155}$$

である.

- 行列の積

$$\hat{A} = \hat{B}\hat{C} \tag{156}$$

としたとき, 連立一次方程式では

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{157}$$

と

$$\hat{D}(\hat{E}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \tag{158}$$

があらゆる $\boldsymbol{b}$ に対して同じである. そのためには,

$$\begin{aligned}
\hat{D}\hat{E}\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) && (159) \\
&= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11}x + e_{12}y \\ e_{21}x + e_{22}y \end{pmatrix} && (160) \\
&= \begin{pmatrix} d_{11}(e_{11}x + e_{12}y) + d_{12}(e_{21}x + e_{22}y) \\ d_{21}(e_{11}x + e_{12}y) + d_{22}(e_{21}x + e_{22}y) \end{pmatrix} && (161) \\
&= \begin{pmatrix} (d_{11}e_{11} + d_{12}e_{21})x + (d_{11}e_{12} + d_{12}e_{22}) \\ (d_{21}e_{11} + d_{22}e_{21})x + (d_{21}e_{12} + d_{22}e_{22}) \end{pmatrix} && (162) \\
&= \begin{pmatrix} d_{11}e_{11} + d_{12}e_{21} & d_{11}e_{12} + d_{12}e_{22} \\ d_{21}e_{11} + d_{22}e_{21} & d_{21}e_{12} + d_{22}e_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} && (163)
\end{aligned}$$

であるので, 次のように行列の積を定義する.

$$\hat{D}\hat{E} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \tag{164}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11}e_{11} + d_{12}e_{21} & d_{11}e_{12} + d_{12}e_{22} \\ d_{21}e_{11} + d_{22}e_{21} & d_{21}e_{12} + d_{22}e_{22} \end{pmatrix} \tag{165}$$

次の例を考えよう

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{166}$$

とすると

$$\hat{D}\hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 0\times 0 & 1\times 2 + 0\times 0 \\ 2\times 1 + 1\times 0 & 2\times 2 + 0\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{167}$$

注意！

$$\hat{E}\hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 2 & 1\times 0 + 2\times 1 \\ 0\times 2 + 0\times 2 & 0\times 0 + 0\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A \tag{168}$$

従って

$$\hat{D}\hat{E} \neq \hat{E}\hat{D} \tag{169}$$

である. 一般に行列の積は可換

$$\hat{D}\hat{E} = \hat{E}\hat{D} \tag{170}$$

ではない.

また行列の積にも定数の積の 1 に対応するものが存在して単位行列と呼ぶ. 2 行 2 列の行列の場合は

$$\hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{171}$$

実際

$$\hat{I}_2\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 0\times 2 & 1\times 2 + 0\times 4 \\ 0\times 2 + 1\times 2 & 0\times 2 + 1\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{172}$$

かつ

$$\hat{A}\hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 2 & 1\times 0 + 2\times 1 \\ 2\times 0 + 4\times 1 & 2\times 0 + 4\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{173}$$

となり左から掛けても右から掛けても元の行列 $\hat{A}$ になる.

- スカラー倍行列の定数 k 倍を

$$k\hat{A} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix} \tag{174}$$

とする例えば $k=2$ とすると

$$2\hat{A} = \begin{pmatrix} 2\times 1 & 2\times 2 \\ 2\times 2 & 2\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \tag{175}$$

線形代数 I (担当 松下勝義)

レポート III

与えられた定数 k と行列 $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ に対して, 次の演算がそれぞれで定義できる場合は結果を求めよ, できない場合はその理由を述べよ.

$$k(\hat{A}+\hat{B}\hat{C}) \tag{176}$$

- レポート問題 III–1.

$$k=2, \qquad \hat{A}=\hat{I}\equiv\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \hat{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix} \qquad \hat{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- レポート問題 III–2.

$$k=2, \qquad \hat{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \qquad \hat{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix} \qquad \hat{C}=\hat{I}_2\equiv\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

- レポート問題 III–3.

$$k=1, \qquad \hat{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad \hat{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \hat{C}=\hat{O}\equiv\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

- レポート問題 III–4.

$$k=\frac{1}{2}, \qquad \hat{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}, \qquad \hat{B}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix} \qquad \hat{C}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$$

レポート III の答え

- レポート問題 III–1.

$$
\begin{aligned}
k\hat{A}+\hat{B}\hat{C} &= 2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 6\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となるが, 行列の列数が異なる行列の和は定義できない.

- レポート問題 III–2.

$$
\begin{aligned}
k\hat{A}+\hat{B}\hat{C} &= 2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 6\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- レポート問題 III–3.

$$
\begin{aligned}
k\hat{A}+\hat{B}\hat{C} &= 1\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- レポート問題 III–4.

$$
\begin{aligned}
k\hat{A}+\hat{B}\hat{C} &= \frac{1}{2},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+00\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

演習 3

以下に示した行列の演算を計算せよ.

- 演習問題 3–1. 行列 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{177}$$

に対して $\hat{A}^3$ を計算せよ.

- 演習問題 3–2 次の行列 $\hat{B}'$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{178}$$

に対して,

$$\hat{P}\hat{B} = \hat{B}' \tag{179}$$

となるような 3 次正方行列（3 行 3 列の行列)$\hat{P}$ を答えよ.

- 演習問題 3–3 次の三つの 2 次正方行列の中から条件を満たす行列を選べ.

$$\hat{P}_2(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \hat{P}_{21}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{P}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{180}$$

  - (a) 左からかけた際 2 行目を 3 倍して 1 行目へ足す行列.
  - (b) 左からかけた際 1 行目と.2 行目の行列を入れ替える行列.
  - (c) 左からかけた 2 行目を 3 倍する行列は行列

- 演習問題 3–4 次の行列 $\hat{A}$ を階段行列にする行列を, 行基本行列に対応する行列の積として作れ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{181}$$

演習 3 の答え

- 演習問題 3–1.

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{182}$$

とおくと

$$\hat{A}'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}_3 \tag{183}$$

従って

$$\hat{A}^3 = (\hat{I}_3 + \hat{A}')^3 \tag{184}$$

$$= \hat{I}_3 + 3\hat{A}' + 3(\hat{A}')^2 + (\hat{A}')^3 \tag{185}$$

$$= \hat{I}_3 + 3\hat{A}' + 3\hat{I}_3 + \hat{A}' \tag{186}$$

$$= 4(\hat{I}_3 + \hat{A}') \tag{187}$$

$$= 4\hat{A} \tag{188}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \tag{189}$$

- 演習問題 3–2.

$$\hat{P}_{12} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \tag{190}$$

と置く． これから

$$\hat{P}_{12}\hat{B} = \begin{pmatrix} p_{11} + 3p_{12} & 2p_{11} + 4p_{12} & p_{13} \\ p_{21} + 3p_{22} & 2p_{21} + 4p_{22} & p_{23} \\ p_{31} + 3p_{32} & 2p_{31} + 4p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \tag{191}$$

ここから

$$\begin{cases} p_{11} + 3p_{12} = 3 \\ 2p_{11} + 4p_{12} = 4 \\ p_{13} = 0 \\ p_{21} + 3p_{22} = 1 \\ 2p_{21} + 4p_{22} = 2 \\ p_{23} = 0 \\ p_{31} + 3p_{32} = 0 \\ 2p_{31} + 4p_{32} = 0 \\ p_{33} = 1 \end{cases} \tag{192}$$

この連立一次方程式を解くと

$$p_{11} = 0 \tag{193}$$
$$p_{12} = 1 \tag{194}$$
$$p_{13} = 0 \tag{195}$$
$$p_{21} = 1 \tag{196}$$
$$p_{22} = 0 \tag{197}$$
$$p_{23} = 0 \tag{198}$$
$$p_{31} = 0 \tag{199}$$
$$p_{32} = 0 \tag{200}$$
$$p_{33} = 1 \tag{201}$$
$$\tag{202}$$

よって,

$$\hat{P}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{203}$$

この行列は 1 行目と 2 行目を入れ替える行基本変形を行う行列である.

- 演習問題 3–3 3 つの 2 次正方行列を行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{204}$$

. へかけてみる. するとそれぞれ,

$$\hat{P}_2(3)\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 3a_{21} & 3a_{22} \end{pmatrix} \tag{205}$$

$$\hat{P}_{21}(3)\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 3a_{21} & 3a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + 3a_{21} & a_{12} + 3a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{206}$$

$$\hat{P}_{12}\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \tag{207}$$

となる. 従って,

- (a) 左からかけた際 2 行目を 3 倍して 1 行目へ足す行列. は $P_{21}(3)$
- (b) 左からかけた際 1 行目と.2 行目の行列を入れ替える行列. は P_{12}
- (c) 左からかけた 2 行目を 3 倍する行列は $P_2(3)$

- 演習問題 3–4
  行列 $\hat{A}$ は以下の基本変形の手順で三角行列にできる.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \tag{208}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{209}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{210}$$

$$\tag{211}$$

これは以下の手順である.

1. 1 行目と 2 行目を入れ替える.
2. 1 行目の-2 倍を 2 行目を 2 行目にかける
3. 2 行目の-1/3 倍する.
4. 2 行目の-3 倍を 1 行目に足す.

これらはそれぞれ行列で

1.

$$\hat{P}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{212}$$

2.

$$\hat{P}_{12}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{213}$$

3.

$$\hat{P}_{2}(-1/3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{214}$$

4.

$$\hat{P}_{21}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{215}$$

これらを使えば

$$\hat{P}_{21}(-3)\hat{P}_{2}(-1/3)\hat{P}_{12}(-2)\hat{P}_{12}\hat{A} = \hat{I} \tag{216}$$

と階段行列化を表現できる.

線形代数 I (担当 松下勝義)

IV. 逆行列の解法

教科書 §3.3-3.5, pp.32–44

講義ノート

連立一次方程式はこれまで見てきたように行列にベクトルをかけた形で書ける.

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{217}$$

もし $\hat{A}$ が正方行列でもう一つ正方行列 $\hat{A}^{-1}$ が以下の性質を満たすとする.

$$\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I} \tag{218}$$

このとき連立一次方程式 (217) の両辺から $\hat{A}^{-1}$ をかけると

$$\hat{A}^{-1}(\hat{A}\boldsymbol{x}) = (\hat{A}^{-1}\hat{A})\boldsymbol{x} = \hat{I}\boldsymbol{x} = \hat{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{219}$$

となるので解が

$$\boldsymbol{x} = \hat{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{220}$$

と形式的に求まる. このような $\hat{A}^{-1}$ は行列の普通の数の逆数に対応するもので逆行列と呼ぶ. 一般に逆行列を求めるのは掃き出し法より難しいため, 連立一次方程式を解くために逆行列を求めることはないが, 様々な応用があるため今回はこの逆行列を学習する.

- 逆行列の行基本変形による表現. 演習で行基本変形が行列でかけることを見た. 例として, 行基本変形は 2 行 2 列の範囲では
  - 1 行目と 2 行目を入れ替える,

$$\hat{P}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{221}$$

  - 1 行目を n 倍する

$$\hat{P}_{1}(n) = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{222}$$

  - 2 行目を k 倍を 1 行目に足す

$$\hat{P}_{21}(k) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{223}$$

などのように書ける.

与えられた行列 $\hat{A}$ に対して, その階段行列 $\hat{B}$ をつくる行基本変形を $\hat{P}_1\hat{P}_2\hat{P}_3\cdots\hat{P}_n$ と書くとき, これまで連立一次方程式の解法で見てきたように解が一意に決まる場合は $\hat{B}=\hat{I}$ でなければならない. このとき

$$\hat{P}_1\hat{P}_2\hat{P}_3\cdots\hat{P}_n\hat{A}=\hat{I} \tag{224}$$

となる. 先ほど述べた通り, 逆行列は

$$\hat{A}^{-1}\hat{A}=\hat{I} \tag{225}$$

を満たすため, (厳密には一意性が必要だが) 以下のように見なしてよい

$$\hat{A}^{-1}=\hat{P}_1\hat{P}_2\hat{P}_3\cdots\hat{P}_n\hat{I} \tag{226}$$

ここで一番右の単位行列は必要ではないが, のちの逆行列の求め方の説明の都合上付けておく.

例としては演習問題 3–4 を考える.

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix} \tag{227}$$

この行列に対して演習問題の解答から

$$\hat{P}_{21}(-3)\hat{P}_2(-1/3)\hat{P}_{12}(-2)\hat{P}_{12}\hat{A}=\hat{I} \tag{228}$$

が成り立つが, これは逆行列が

$$\begin{aligned}\hat{A}^{-1}&=\hat{P}_{21}(-3)\hat{P}_2(-1/3)\hat{P}_{12}(-2)\hat{P}_{12}\hat{I} &(229)\\ &=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} &(230)\\ &=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix} &(231)\end{aligned}$$

と計算できる. 実際に $\hat{A}$ に左からかけてみると,

$$\hat{A}^{-1}\hat{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{232}$$

となる.

- 正則逆行列の存在する行列を正則行列と呼ぶ. 正則な行列に対しては
  - 逆行列が存在する.

– 係数行列とする連立一次方程式の解が一意に定まる.

– 行列の階数が正方行列の次数と一致する.

が成立している.

- 逆行列の解法逆行列が行基本変形を単位行列に施して得られることが分かった. これは以下のように行列 $\hat{A}$ と $\hat{I}$ に同時に行基本変形を行う事でも実行できる.

$$\left(\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{I} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{233}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \tag{234}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \tag{235}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \tag{236}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \tag{237}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \hat{I} & \hat{A}^{-1} \end{array}\right) \tag{238}$$

と左の行列を行基本変形で階段行列へ変形すると右に逆行列ができる.

- 逆行列の性質もし $\hat{B}$ が存在し,

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{I} \tag{239}$$

とするとき, 右から $\hat{A}^{-1}$ をかけると

$$\hat{A}^{-1}\hat{A}\hat{B} = \hat{B} = \hat{A}^{-1} \tag{240}$$

なので

$$\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I} = \hat{A}\hat{A}^{-1} \tag{241}$$

と逆行列とのかけ算は可換である.

線形代数 I (担当 松下勝義)

レポート IV

以下に与えられた行列 $\hat{A}$ に対して, 行基本変形で逆行列が存在するか判定し, 存在する場合は逆行列を答えよ.

- 演習問題 VI–1.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

- 演習問題 VI–2.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- 演習問題 VI–3.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

レポート IV の答え

- 演習問題 VI–1.

$$\left(\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{I} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \tag{242}$$

より逆行列は存在し

$$\hat{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- 演習問題 VI–2.

$$\left(\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{I} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{243}$$

となり左辺を階段行列が階数が 1 であることを示しており, 行列の次数 2 と一致しない. そのため逆行列は存在しない.

- 演習問題 VI–3.

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{I} \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 7 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right) \\
&\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

となり逆行列は

$$\hat{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

.

線形代数 I (担当 松下勝義)

IX. (行列式の定義と順列の転位数)

以下の順列 σ に対して転位数を求めよ．そして, それを基に偶順列か奇順列かを判定し, 符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を求めよ．

1. 演習問題 IX-1.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

2. 演習問題 IX-2.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

以下の行列 $\hat{A}$ の行列式 $|\hat{A}|$ を定義から求めよ．

3. 演習問題 IX-3.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 31 & 97 & 32 \\ 1 & 24 & 41 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

4. 演習問題 IX-4.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1024 & 987 \\ 0 & 2 & 583 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. 演習問題 IX-5.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

6. 演習問題 IX-6.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

線形代数 I (担当 松下勝義)

Xa. (行列式の性質)

次の定数 k と n 次正方行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ に対して下の式のペアを行列式の性質より計算せよ.

- (スカラー倍)

$$k^n \left|\hat{A}\right|, \qquad \left|k\hat{A}\right|. \tag{244}$$

- (転置)

$$\left|{}^t\hat{A}\right|, \qquad \left|\hat{A}\right|. \tag{245}$$

- (行列の積)

$$\left|\hat{A}\hat{B}\right|, \qquad \left|\hat{A}\right|\left|\hat{B}\right|. \tag{246}$$

1. 演習問題 Xa-1.

$$k = 3, \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

2. 演習問題 Xa-2.

$$k = 2, \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \hat{A}^{-1}$$

以下に与えられた全ての行列式を計算せよ. ただし, 教科書の定理 4.5-定理 4.8 を用いてよい.

3. 演習問題 Xa-3(行や列ベクトルのスカラー倍).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ k & k & k \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2k & k & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} k & 2k & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2k & 0 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & 1k & 1 \end{vmatrix}$$

4. 演習問題 Xa-4.(三角行列などの 0 成分を多く含む行列式)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5. 演習問題 Xa-5. (行ベクトルの和)

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2+c \\ a_2 & 3+c \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

線形代数 I (担当 松下勝義)

Xb. (行列式の性質)

3 次行列以下の $\hat{A}$ に対してそれに以下の基本変形を行った行列に対して行列式を計算する手順を述べよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

1. 演習問題 Xb-1.
   - (a) 1 行目と 3 行目の入れ替え
   - (b) 2 行目と 3 行目の入れ替えた後, 1 行目と 3 行目を入れ替え
2. 演習問題 Xb-2.
   - (a) 1 行目の 2 倍を 3 行目に足す
   - (b) 2 列目の 2 倍を 3 列目に足す
3. 演習問題 Xb-3.
   - (a) 1 行目の 3 倍する
   - (b) 2 列目の 2 倍する

線形代数 I (担当 松下勝義)

XI. (行列式の計算)

次の n 次正方行列 $\hat{A}$ に対して行列式を計算する手順を述べよ.

1. 演習問題 XI-1.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. 演習問題 XI-2.

$$\hat{A} = {}^{t}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. 演習問題 XI-3.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{3}$$

4. 演習問題 XI-4.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

線形代数 I (担当 松下勝義)

XII. (余因子展開)

次の n 次正方行列 $\hat{A}$ に対して以下の計算を実行せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. 演習問題 XI-1. $\left|\hat{A}\right|$ を計算せよ.
2. 演習問題 XI-2. a_{12} 成分の余因子を計算せよ.
3. 演習問題 XI-3. 1 行目に対して余因子展開を書き下せ.
4. 演習問題 XI-3. 2 行目に対して余因子展開を書き下せ.

線形代数 I (担当 松下勝義)

中間試験　5/16

- 問題 1. 以下の連立 1 次方程式を拡大係数行列で表し掃き出し法で解く手順を述べよ.

$$\begin{cases} 2x & -4y & +z & = 2 \\ 3x & -5y & -z & = 3 \\ x & -2y & & = 1 \end{cases}$$

- 問題 2

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とベクトル $\boldsymbol{c}$

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

の積 $\hat{A}\boldsymbol{c}$ を計算せよ.

- 問題 3 以下の行列の階段行列をつくる手順を示し, 得られた階段行列から階数を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- 問題 4 連立一次方程式 $\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- 問題 5 以下の連立一次方程式に対して解の存在を判定せよ.

$$\begin{cases} 3w & +2x & -y & = & -15 \\ 5w & +3x & +2y & = & 0 \\ 3w & +x & +3y & = & 11 \\ -2w & -x & -3y & = & -15 \end{cases}$$

- 問題 6 以下の同次連立一次方程式の解をピボットでない未知数を含む形で求めよ.

$$
\begin{cases}
2w & -4x & +y & +z & = & 0 \\
w & -5x & +2y & -2z & = & 0 \\
3w & -x & +y & +5z & = & 0 \\
w & -2x & -y & +z & = & 0
\end{cases}
$$

中間試験解答例　5/16

- 問題 1

  拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これの係数行列を行基本変形して階段行列を作ると，

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに答えは Ans.

$$\underline{\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}}$$

- 問題 2

$$\begin{aligned} \hat{A}\boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 2 & + & 0 \times 1 & + & 2 \times -1 \\ 0 \times 2 & + & -1 \times 1 & + & 1 \times -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって答えは Ans.

$$\underline{\hat{A}\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

- 問題 3

  行基本変形で階段行列を作ると,

$$\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

  よって階段行列は Ans.

$$\underline{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

  またピボットの数から <u>階数 $r = 3$ である.</u>

- 問題 4

  拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix}2 & -4 & 2\\ 3 & -4 & 3\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

  これの係数行列を行基本変形して階段行列を作ると,

$$\begin{pmatrix}2 & -4 & 2\\ 3 & -4 & 3\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -4 & 2\\ 3 & -4 & 3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -6\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

  従って係数行列の階数は $r = 2$ で $d_3 \neq 0$ である.
  Ans. <u>この連立方程式には解はない.</u>

- 問題 5

  拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ -2 & -1 & -3 & -15 \end{pmatrix}$$

  これの係数行列を行基本変形して階段行列を作ると,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ -2 & -1 & -3 & -15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & -1 & -3 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -15 \\ -2 & -1 & -3 & -15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 20 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -23 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 20 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 23 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & -7 & -49 \\ 0 & 0 & -7 & -49 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & -7 & -49 \\ 0 & 0 & -7 & -49 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & -7 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  ピボットから係数行列の階数は r=3 であり, $n > r$ で d_n はすべて 0 である. 従って Ans. <u>この連立一次方程式には解が存在する.</u>

- 問題 6

  拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  これの係数行列を行基本変形して階段行列を作ると,

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  ピボットから係数行列の階数は r=3 であり, $n > r$ で d_n はすべて 0 である. また n = 4 のため未知変数が一つ存在する. ここでその未知変数として $z = c$ と置くと,

$$\begin{cases} w & & & 2z & = 0 \\ & x & & \frac{2}{3}z & = 0 \\ & & y & -\frac{z}{3} & = 0 \\ & & & z & = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w & & & & = -2z \\ & x & & & = -\frac{2}{3}z \\ & & y & & = \frac{z}{3} \\ & & & z & = c \end{cases}$$

  従って Ans.

$$\underline{\begin{cases} w = -2c \\ x = -\frac{2}{3}c \\ y = \frac{c}{3} \\ z = c \end{cases}}$$

線形代数 I (担当 松下勝義)

期末試験　7/18

1. 問題 1 次の行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の和を答えよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 問題 2 次の行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の積を答えよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. 問題 3 次の行列 $\hat{A}$ の転置行列 ${}^t\hat{A}$ を与えよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. 問題 4 次の行列 $\hat{A}$ の逆行列 $\hat{A}^{-1}$ を **行基本変形で求める手順** を与えよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. 問題 5 次の行列 $\hat{B}$ の行列式 $|\hat{A}|$ を **基本変形で求める手順** を与えよ.

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. 問題 6 次の行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ が正則か否かをそれぞれ **理由を添えて** 答えよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. 問題 7 次の行列うち対称行列と交代行列をそれぞれ **理由を添えて** 答えよ

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

8. 問題 8 行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ が可換か判定し, そう判定した **理由を述べよ**.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. 問題 9 次の行列 $\hat{A}$ の行列式の値を求めよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. 問題 10 行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ について行列式 $|\hat{A}\hat{B}|$ の値を求めた方法を説明せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

11. 問題 11 これまでを振り返って感想等を述べよ. 特に授業はどう改善されるべきか後期に備えて答えよ.

補足 1　連立一次方程式の基本変形の手順の書き方の例

連立 1 次方程式の基本変形は, 連立 1 次方程式を同値な連立 1 次方程式に変形する. 従って変形の前後は同値な連立 1 次方程式でなければならない. その二つの連立 1 次方程式を分かるように印す. また, どの様な基本変形を行ったかも記す. 以下に例を示す.

- 1 つの方程式に 0 でない係数を掛ける
  式 ③ を 1/2 倍する.

$$\begin{cases} x-2y-3z=4 & \text{①} \\ 7y+10z=-4 & \text{②} \\ 2y+2z=-2 & \text{③} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{①} \Rightarrow & x-2y-3z=4 & \text{①} \\ \text{②} \Rightarrow & 7y+10z=-4 & \text{②} \\ \text{③} \times \frac{1}{2} \Rightarrow & y+z=-1 & \text{④} \end{cases}$$

- 1 つの方程式の定数倍を他の方程式に加える
  式 ④ の-7 倍を ② に加える.

$$\begin{cases} x-2y-3z=4 & \text{①} \\ y+z=-1 & \text{④} \\ 7y+10z=-4 & \text{②} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{①} \Rightarrow & x-2y-3z=4 & \text{①} \\ \text{④} \Rightarrow & y+z=-1 & \text{④} \\ \text{②} - 7\text{④} \Rightarrow & 3z=3 & \text{⑤} \end{cases}$$

- 2 つの方程式を入れ替える

$$\begin{cases} x-2y-3z=4 & \text{①} \\ 7y+10z=-4 & \text{②} \\ y+z=-1 & \text{④} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{①} \Rightarrow & x-2y-3z=4 & \text{①} \\ \text{④} \Rightarrow & y+z=-1 & \text{④} \\ \text{②} \Rightarrow & 7y+10z=-4 & \text{②} \end{cases}$$

手順を示すときは, これらの基本変形を順に進め

$$\begin{cases} x-2y-3z=4 & \text{①} \\ 2x+3y+4z=4 & \text{②} \\ 3x-4y-7z=10 & \text{③} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{①} \Rightarrow & x \quad -2y \quad -3z \quad =4 & \text{①} \\ \text{②} - 2\text{①} \Rightarrow & 7y \quad +10z \quad =-4 & \text{⑫} \\ \text{③} - 3\text{①} \Rightarrow & 2y \quad -2z \quad =-2 & \text{⑬} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cdots \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \text{⑪} + 2\text{⑫} & \Rightarrow & x = 3 & \text{⑭} \\ \text{⑫} & \Rightarrow & y = -2 & \text{⑫} \\ \text{⑬} & \Rightarrow & z = 1 & \text{⑬} \end{cases} \tag{247}$$

のように連立一次方程式を解く.

補足 2　ベクトルと行列

補足 2.1　ベクトル

- m 次数の行ベクトル (row vector)$\boldsymbol{x}^T$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_m \end{pmatrix} \tag{248}$$

  – 例: 3 次数の列ベクトル $\boldsymbol{a}^T$

$$\boldsymbol{a}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \tag{249}$$

- n 次数の列ベクトル (column vector)$\boldsymbol{x}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{250}$$

  – 例: 3 次数の列ベクトル $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} \tag{251}$$

- ベクトル $\boldsymbol{x}$ の第 i 成分 x_i

  – 例: 式 (251) のベクトル $\boldsymbol{b}$ の第 2 成分

$$b_2 = -2 \tag{252}$$

- n 次数の列ベクトルの転置 $(\boldsymbol{x})^T$(transposition) 転置は列ベクトルを成分が同じ行ベクトルに変わる.

$$(\boldsymbol{x})^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}^T \tag{253}$$

行ベクトルに対しても同様に成分が同じ列ベクトルへ変わる.

– 例: 式 (251) のベクトル $\boldsymbol{b}$ の転置

$$(\boldsymbol{b})^T = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -10 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}^T \tag{254}$$

- ベクトルの同値 (同じ) 同じ次数 n を持つ列ベクトル $\boldsymbol{x}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{255}$$

と $\boldsymbol{y}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{256}$$

に対して $1 \leq i \leq n$ の任意の i で

$$x_i = y_i \tag{257}$$

が成立するとき, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を同値と定義する. これを以下のようにあらわす.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{258}$$

と表す. どれか一つの i でも x_i と y_i が異なる $(x_i \neq y_i)$ 場合は

$$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \tag{259}$$

と表す.

– 例: : 式 (249) の行ベクトル $\boldsymbol{a}^T$ の転置 $\boldsymbol{a} =$ と式 (251) のベクトル $\boldsymbol{b}$ は全ての成分が異なるため,

$$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b} \tag{260}$$

- ベクトルの表記
  – 普通の数 (斜体): x, y, z, a, b, c
  – ベクトル (太字斜体) $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$

補足 2.2　行列

- m 行 n 列行列 $\hat{A}$(matrix)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{261}$$

  – 例 1: 3 行 3 列行列 §2.1 の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = 4 \\ 3x - 4y - 7z = 10 \end{cases} \tag{262}$$

  の係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \tag{263}$$

  – 例 2: 3 行 4 列行列 §2.1 の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = 4 \\ 3x - 4y - 7z = 10 \end{cases} \tag{264}$$

  の拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \tag{265}$$

- m 行 n 列行列 $\hat{A}$(matrix) の第 i 行 $\boldsymbol{a}_i^T$

$$\boldsymbol{a}_i^T = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \tag{266}$$

  – 例 係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \tag{267}$$

  の第 2 行ベクトル

$$\boldsymbol{a}_2^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{268}$$

- m 行 n 列行列 $\hat{A}$(matrix) の第 j 列 $\boldsymbol{a}_j$

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{3j} \end{pmatrix} \tag{269}$$

  – 例 係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \tag{270}$$

  の第 2 列ベクトル

$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \tag{271}$$

- m 行 n 列行列 $\hat{A}$(matrix) の (i,j) 成分 a_{ij}

  – 例 1 係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \tag{272}$$

  の (2,2) 成分

$$\boldsymbol{a}_{22} = 3 \tag{273}$$

  – 例 2 係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \tag{274}$$

  の (2,3) 成分

$$\boldsymbol{a}_{23} = 4 \tag{275}$$

補足 2.3　行列とベクトルの積

- m 行 n 列行列 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{276}$$

と n 次数の列ベクトル $\boldsymbol{x}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \tag{277}$$

の積 $\hat{A}\boldsymbol{x}$

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times x_1 + a_{12} \times x_2 + \ldots + a_{1n} \times x_n \\ a_{21} \times x_1 + a_{22} \times x_2 + \ldots + a_{2n} \times x_n \\ \vdots \\ a_{m1} \times x_1 + a_{m2} \times x_2 + \ldots + a_{mn} \times x_n \end{pmatrix} \tag{278}$$

と定義する.

  – 例 1 係数行列 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \tag{279}$$

とベクトル $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{280}$$

の積

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times x + -2 \times y + -3 \times z \\ 2 \times x + 3 \times y + 4 \times z \\ 3 \times x + -4 \times y + -7 \times z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y - 3z \\ 2x + 3y + 4z \\ 3x - 4y - 7z \end{pmatrix} \tag{281}$$

– 例 2 係数行列 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \tag{282}$$

とベクトル $\boldsymbol{c}$

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{283}$$

の積

$$\hat{A}\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + -2\times 2 + -3\times -1 \\ 2\times 1 + 3\times 2 + 4\times -1 \\ 3\times 1 + -4\times 2 + -7\times -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \tag{284}$$

- 例 3 行列を用いた方程式　$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える. ただし $\boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} \tag{285}$$

とする. このとき, 式 (281) より

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x - 2y - 3z \\ 2x + 3y + 1z \\ 3x - 4y - 7z \end{pmatrix} \tag{286}$$

である.　従って, $\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は,

$$\begin{pmatrix} x - 2y - 3z \\ 2x + 3y + 1z \\ 3x - 4y - 7z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} \tag{287}$$

ベクトルの同値の定義より,　これは §2.1 の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + z = -4 \\ 3x - 4y - 7z = 10 \end{cases} \tag{288}$$

と同じである.

補足3　連立一次方程式の解き方

- 例題 2. 3 に対応する連立一次方程式,

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & 2x & -2y & +z & = & 3 \\ w & +3x & +y & +z & = & 2 \\ 3w & +5x & +7y & +2z & = & 2 \\ 2w & +4x & +4y & +2z & = & 3 \end{array}\right. \tag{289}$$

とその拡大係数行列 $(\hat{B}\ \boldsymbol{d})$ を考える.

$$\begin{pmatrix} \hat{B} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{290}$$

例題の回答から, 対応する階段行列 $(\hat{C}\ \boldsymbol{e})$ は,

$$\begin{pmatrix} \hat{B} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \hat{C} & \boldsymbol{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{291}$$

となる.

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{292}$$

$$\hat{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e} \tag{293}$$

行列とベクトルの掛け算の定義から

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \boxed{1} \times w & +0 \times x & +4 \times y & +0 \times z & = & -\frac{3}{2} \\ 0 \times w & +\boxed{1} \times x & +(-1) \times y & +0 \times z & = & -\frac{1}{2} \\ 0 \times w & +0 \times x & +0 \times y & +\boxed{1} \times z & = & 2 \\ 0 \times w & +0 \times x & +0 \times y & +0 \times z & = & 0 \end{array}\right. \tag{294}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} \boxed{\mathrm{w}} & & +4y & & = & -\frac{3}{2} \\ & \boxed{\mathrm{x}} & -y & & = & -\frac{1}{2} \\ & & & \boxed{\mathrm{z}} & = & 2 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \tag{295}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} \boxed{\mathrm{w}} & & & +4y & = & -\frac{3}{2} \\ & \boxed{\mathrm{x}} & & -y & = & -\frac{1}{2} \\ & & \boxed{\mathrm{z}} & & = & 2 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \tag{296}$$

このときピボット未知数は $\boxed{\mathrm{w}}, \boxed{\mathrm{x}}, \boxed{\mathrm{z}}$ でピボットでない未知数は y である．そこでピボットでない未知数に関して

$$y = c \tag{297}$$

とする．結果的に,

$$\begin{cases} \boxed{\mathrm{w}} & = \quad -\frac{3}{2} - 4c \\ \quad\quad \boxed{\mathrm{x}} & = \quad -\frac{1}{2} + c \\ \quad\quad\quad\quad \boxed{\mathrm{z}} & = \quad 2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 & = \quad 0 \end{cases} \tag{298}$$

補足 4　行列の演算

1. $m \times n$ 行列の記法

$$\hat{A} = (a_{ij}) \tag{299}$$

ここで a_{ij} は § 補足 2.2 で定義した i 行 j 列成分.

2. 行列の相等
$m \times n$ 行列 $\hat{A} = (a_{ij})$, $m \times n$ 行列 $\hat{B} = (b_{ij})$ に対して,

$$(a_{ij}) = (b_{ij}) \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i,\ j \tag{300}$$

- 例 (相等)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \hat{A} = \hat{B} \tag{301}$$

- 例 (不等)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \hat{A} \neq \hat{B} \tag{302}$$

3. 行列の和
和は行列の行と列の数が同じものに対してのみ定義される.
$m \times n$ 行列 $\hat{A} = (a_{ij})$, $m \times n$ 行列 $\hat{B} = (b_{ij})$ に対して,

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \quad \forall i,\ j \tag{303}$$

- 例

$$\begin{aligned} &\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad &\hat{A} + \hat{B} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+0 \\ 3+1 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{304}$$

4. 行列のスカラー倍
$l \times m$ 行列 $\hat{A} = (a_{ij})$ に対して,

$$k\hat{A} = k(a_{ij}) = (ka_{ij}) \quad \forall i,\ j \tag{305}$$

ただし $k = -1$ の場合,

$$(-1)\hat{A} = -\hat{A} \tag{306}$$

と省略する.

- 例

$$k=2,\quad \hat{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad 2\hat{A}=\begin{pmatrix}2\times 1 & 2\times 2\\ 2\times 3 & 2\times 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix} \tag{307}$$

5. 行列の積

   二つの行列 A, B の積 AB は行列 A の列数と行列 B の行数が同じものに対してのみ定義される.

   $l\times m$ 行列 $\hat{A}=(a_{ij})$, $m\times n$ 行列 $\hat{B}=(b_{ij})$ に対して,

$$\hat{A}\hat{B}=(a_{ij})(b_{jk})=(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk})\quad \forall i,\ k. \tag{308}$$

   積 AB の行数は必ず行列 A の行数, 列数は行列 B の列数となる.

   B の列数が 1 の場合は積 AB は行列と列ベクトルの積であり, 結果的に答えの列数は 1 となる. 従って行列と列ベクトルの積は列ベクトルになる.

- 例

$$\begin{aligned}&\hat{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad \hat{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\ &\Rightarrow\quad \hat{A}\hat{B}=\begin{pmatrix}1\times 1+2\times 1 & 1\times 0+2\times 1\\ 3\times 1+4\times 1 & 3\times 0+4\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 7 & 4\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{309}$$

- 例

$$\hat{B}\hat{A}=\begin{pmatrix}1\times 1+0\times 3 & 1\times 2+0\times 4\\ 1\times 1+1\times 3 & 1\times 2+1\times 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix} \tag{310}$$

6. 零行列 $\hat{O}$ $m\times n$ 行列 $\hat{O}=(o_{ij})$ が次の形を持つとき零行列とよぶ.

$$o_{ij}=0\quad \forall i,\quad j \tag{311}$$

   そして $l\times m$ 行列 $\hat{A}$ と $n\times k$ 行列 $\hat{B}$ に対して次の性質を満たす.

$$\hat{A}\hat{O}=\hat{O}' \tag{312}$$

$$\hat{O}\hat{B}=\hat{O}'' \tag{313}$$

   ただし $\hat{O}'$ は $l\times n$ 行列の零行列, $\hat{O}''$ は $m\times k$ 行列の零行列である.

7. n 次正方行列

   $\hat{A}$ が $n\times n$ 行列 $\Rightarrow$ $\hat{A}$ は n 次正方行列

8. 行列の可換
   n 次正方行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ に対して

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} \tag{314}$$

   - 例

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{は可換}$$

$$\text{実際,} \quad \hat{A}\hat{B} = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 0\times 0 & 1\times 0 + 0\times 1 \\ 0\times 2 + 2\times 0 & 0\times 0 + 2\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}\hat{A} = \begin{pmatrix} 2\times 1 + 0\times 0 & 2\times 0 + 0\times 2 \\ 0\times 1 + 1\times 0 & 0\times 0 + 1\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{315}$$

9. n 次単位行列 $\hat{I}_n$
   n 次正方行列 $\hat{I}_n$ が次の形を持つとき n 次単位行列とよぶ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{316}$$

   そして n 次正方行列 $\hat{A}$ に対して次の性質を満たす.

$$\hat{A}\hat{I}_n = \hat{I}_n\hat{A} = \hat{A} \tag{317}$$

   - 例

$$\begin{aligned} &\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{に対して} \\ &\hat{A}\hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 0 & 1\times 0 + 2\times 1 \\ 3\times 1 + 4\times 0 & 3\times 0 + 4\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \\ &\hat{I}_2\hat{A} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 0\times 3 & 1\times 2 + 0\times 4 \\ 0\times 1 + 1\times 3 & 0\times 2 + 2\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \end{aligned} \tag{318}$$

10. 行列の冪乗 $\hat{A}^k$ 行列の冪乗は行列の積の定義から正方行列にのみ定義される. ある n 次正方行列 $\hat{A}$ の k 回の積

$$\hat{A}^k = \overbrace{\hat{A}\cdot\hat{A}\cdot\hat{A}\cdots\hat{A}}^{k} \tag{319}$$

- 例

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{に対して} \\
\hat{A}^3 &= \left(\hat{I}_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^3 \\
&= \hat{I}_2^3 + 3\hat{I}_2^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3I_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^3 \\
&= \hat{I}_2 + 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{320}$$

11. 転置行列
    $m \times n$ 行列 $\hat{A} = (a_{ij})$ に対して転置行列 ${}^t\hat{A} = ({}^ta_{ij})$,

$$ {}^t\hat{A} = ({}^ta_{ij}) = (a_{ji}) \tag{321}$$

- 例

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{4} & 5 & \boxed{6} \\ \boxed{7} & \boxed{8} & 9 \\ \boxed{10} & \boxed{11} & \boxed{12} \end{pmatrix}, \text{に対して} \\
{}^t\hat{A} &= \begin{pmatrix} 1 & \boxed{4} & \boxed{7} & \boxed{10} \\ \boxed{2} & 5 & \boxed{8} & \boxed{11} \\ \boxed{3} & \boxed{6} & 9 & \boxed{12} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{322}$$

12. 対称行列 $\hat{T}$
    n 次正方行列 $\hat{T}$ が以下を満たす.

$$ {}^t\hat{T} = \hat{T} \tag{323}$$

- 例

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{2} & 4 & \boxed{5} \\ \boxed{3} & \boxed{5} & 6 \end{pmatrix} \tag{324}$$

13. 交代行列 $\hat{A}$
    n 次正方行列 $\hat{A}$ が以下を満たす.

$$ {}^t\hat{A} = -\hat{A} \tag{325}$$

- 例

$$
\begin{aligned}
\hat{A} &= \begin{pmatrix} 0 & -\boxed{1} & -\boxed{2} \\ \boxed{1} & 0 & -\boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{3} & 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow^t \hat{A} &= \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & \boxed{2} \\ -\boxed{1} & 0 & \boxed{3} \\ -\boxed{2} & \boxed{3} & 0 \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} 0 & -\boxed{1} & -\boxed{2} \\ \boxed{1} & 0 & -\boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{3} & 0 \end{pmatrix} = -\hat{A} \qquad (326)
\end{aligned}
$$

14. 対角行列 $\hat{D}$=(d_{ij})

    n 次正方行列 $\hat{D}$ に対して,

    のとき $\hat{D}$ を対角行列と呼ぶ.

$$
\begin{cases} d_{ij} &= & d_i & i = j \\ d_{ij} &= & 0 & i \neq j \end{cases} \qquad (327)
$$

- 例

$$
\hat{A} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & -\boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} \qquad (328)
$$

- 対角行列ではない例

$$
\hat{A} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & -\boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} \qquad (329)
$$

補足 5　逆行列

1. 逆行列と正則

   n 次正方行列 $\hat{A}$ に対して,

   $$\hat{A}\hat{X} = \hat{X}\hat{A} = I_n \tag{330}$$

   が成立する $\hat{X}$ のことを逆行列と呼び, $\hat{A}^{-1}$ で表す.

   また $\hat{A}$ に対して逆行列が存在する事を $\hat{A}$ は **正則** であると言う. また, この $\hat{A}$ を正則行列とも呼ぶ.

   - 注意 1: つまり必ず逆行列が存在するわけではない.
   - 注意 2: 逆行列は存在すれば一意である (定理 3.2).

2. 逆行列の存在と連立一次方程式の解の存在.

   連立一次方程式

   $$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{331}$$

   の係数行列に対して逆行列 $\hat{A}^{-1}$ が存在する場合を考える. 式 (332) に左から $\hat{A}^{-1}$ を掛けると

   $$\hat{A}^{-1}\hat{A}\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \tag{332}$$

   である. 従って式 (330) より連立一次方程式の解は

   $$\boldsymbol{x} = \hat{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{333}$$

   となる.

   - 注意: 連立一次方程式を解くために逆行列を求めるのは不適切であり, 通常, 掃き出し法などが用いられる. 理由は逆行列を求める手順数より掃き出し法の方が足し算や積の計算回数が少ないからである.

3. 逆行列と行基本変形

   連立一次方程式は行基本変形でも解くことができた. そして, 行基本変形は次のような行列の掛け算でも表せる.

(a) i 行を定数 c 倍する.

$$\hat{P}_i(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c\ (i\text{ 行 }i\text{ 列}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{334}$$

例:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \tag{335}$$

の二行目を 2 倍する.

$$\begin{aligned} \hat{P}_2(2)\hat{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{336}$$

(b) j 行目を c 倍して i 行に足す.

$$\hat{P}_{ij}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & c(i\text{ 行 }j\text{ 列}) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{337}$$

例:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \tag{338}$$

の 1 行目の 2 倍を 2 行目に加える.

$$\hat{P}_{12}(2)\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\times 4 & 2\times 5 & 2\times 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \tag{339}$$

(c) i 行と j 行を入れ替える.

$$\hat{P}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1(i\text{ 行 }j\text{ 列}) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1(i\text{ 行 }j\text{ 列}) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{340}$$

例:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \tag{341}$$

の 1 行目の 2 行目を入れ替える.

$$\hat{P}_{12}\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \tag{342}$$

係数行列 $\hat{A}$ に行基本変形を k 解繰り返す事で階段行列にすることができた (定理 3.7).

もし階段行列が

$$\hat{P}_1\hat{P}_2\cdots\hat{P}_k\hat{A} = \hat{I}_n \tag{343}$$

のように単位行列であれば, 逆行列 $\hat{A}^{-1}$ は

$$A^{-1} = \hat{P}_1\hat{P}_2\cdots\hat{P}_k \tag{344}$$

と書けることを意味する (定理 3.8).

4. 逆行列の求め方

$\hat{A}$ を行基本変形で階段行列へ変形し, 単位行列 $\hat{I}_n$ が得られたものとする. そして, その行基本変形を

$$\hat{P}_1\hat{P}_2\cdots\hat{P}_k \tag{345}$$

とする.

逆行列は式 (344) から,

$$\hat{A}^{-1} = \hat{P}_1\hat{P}_2\cdots\hat{P}_k\hat{I}_n \tag{346}$$

と書ける.

このことから逆行列 $\hat{A}^{-1}$ は行列 $\hat{A}$ の単位行列への行基本変形を単位行列 $\hat{I}_n$ に施すことで得られる.

- 例: (教科書　例題 3.4)

補足 6　行列式の定義

1. ある n 次正方行列 $\hat{A}$
   の行列式 $|\hat{A}|$ と余因子行列 $\hat{\tilde{A}}$ を用いて
   $$\hat{\tilde{A}}\hat{A} = |\hat{A}|\hat{I}_n \tag{347}$$
   と書ける (定理 4.13). もし, 行列式が 0 出なければ, 逆行列は
   $$\hat{A}^{-1} = \frac{\hat{\tilde{A}}}{|\hat{A}|} \tag{348}$$
   と書ける.

   行列式は以下の理由で重要である.

   - 行列式が 0 かどうかは逆行列の存在は同値である (定理 4.10).
   - 余因子行列も行列式で書けるため, 逆行列は行列式のみで表すことができる. 式変形で便利な場合がある.
   - 行列式は 多変数積分の変数変換 で重要な役割を果たす.

   以上の理由から必ず計算できるようになる事.

2. 行列式の簡単な例

   - 2 次の正方行列 $\hat{A} \quad = (a_{ij})$
     $$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{349}$$
     のとき行列式 $|\hat{A}|$ は
     $$|\hat{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{350}$$
   - 例
     2 次の正方行列
     $$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{351}$$
     の場合
     $$|\hat{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \times 1 - 2 \times 0 = 1 \tag{352}$$

3. 正確な行列式の定義

- n 次の順列 σ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{353}$$

  とする.

- n 次の順列の符号を $\mathrm{sgn}(\sigma)$ とする.
- 全ての n 次の順列の集合を P_n とする.

このとき n 次正方行列 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{354}$$

の行列式 $|\hat{A}|$ は

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned} \tag{355}$$

- 例

  2 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{356}$$

とする.

このとき

- 成分は $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 1$
- 2 次の順列は $\sigma = (\sigma(1)\ \sigma(2)) = (1\ 2)$ 及び $\sigma' = (\sigma'(1)\ \sigma'(2)) = (2\ 1)$ の二つがあり, その全体の集合 P_2 は $\{\sigma, \sigma'\}$ である.

$\hat{A}$ の行列式は

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= \mathrm{sgn}(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix})a_{11}a_{22} + \mathrm{sgn}(\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix})a_{12}a_{21} \\ &= \mathrm{sgn}(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix})1 \times 1 + \mathrm{sgn}(\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix})2 \times 0 \end{aligned} \tag{357}$$

$$\tag{358}$$

後で定義するが $\mathrm{sgn}(1\ 2) = 1$, $\mathrm{sgn}(2\ 1) = -1$ である. 結果として,

$$|\hat{A}| = 1 \times 1 \times 1 + (-1) \times 2 \times 0 = 1 \tag{359}$$

4. 順列 σ の符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ の定義

(a) n 次の順列

i. <u>n 次の順列</u>1 から n までの数,

$$1, 2, 3, \ldots n \tag{360}$$

を任意の順番に並べたもの

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{361}$$

と表し, それを <u>順列</u> と呼ぶ.

- 例 2 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{362}$$

この場合 $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$ である.

- 例 3 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{363}$$

この場合 $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 2$ である.

ii. <u>n 次の基本順列</u>

$$1, 2, 3, \ldots n \tag{364}$$

をその順番に並べた順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix} \tag{365}$$

は特別に <u>基本順列</u> と呼ぶ.

- 例 2 次の基本順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{366}$$

- 例 3 次の基本順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \tag{367}$$

iii. <u>順列の転位数</u>

与えられた順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{368}$$

に対して,

$$i < j \quad \text{かつ} \quad \sigma(i) > \sigma(j) \tag{369}$$

となる i と j の対の数を <u>転位数</u> と呼ぶ. 転位数が偶数の順列を <u>偶順列</u>, 奇数の順列を <u>奇順列</u> と呼ぶ.

- 例 1 2 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{370}$$

の場合 $\sigma(1) = 1 < \sigma(2) = 2$ であるため転位数は 0 である．この順列は偶順列である．

- 例 2

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{371}$$

の場合 $\sigma(1) = 2 > \sigma(2) = 1$ であるため転位数は 1 である．この順列は奇順列である．

- 例 3 3 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{372}$$

の場合 $\sigma(1) = 3 > \sigma(2) = 1$, $\sigma(1) = 3 > \sigma(3) = 2$, $\sigma(2) = 1 < \sigma(3) = 2$ であるため転位数は 2 である．この順列は偶順列である．

- 例 4 3 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{373}$$

の場合 $\sigma(1) = 3 > \sigma(2) = 2$, $\sigma(1) = 3 > \sigma(3) = 1$, $\sigma(2) = 2 > \sigma(3) = 1$ であるため転位数は 3 である．この順列は奇順列である．

iv. <u>順列の符号</u>

順列 σ の <u>符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$</u> は以下の順列の関数である．

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma\text{が偶順列} \\ -1 & \sigma\text{が奇順列} \end{cases} \tag{374}$$

- 例 2 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{375}$$

は偶順列であるため $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{376}$$

の場合奇順列であるため $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$

- 例 3 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{377}$$

の場合偶順列であるため $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ である．3 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{378}$$

の場合奇順列であるため $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ である．

(b) n 次順列の集合 P_n

n 次の順列すべての集合を P_n と表す.

また σ が P_n に属するとき,

$$\sigma \in P_n \tag{379}$$

と表す.

- 例 2 次の順列の集合

$$P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{380}$$

- 例 3 次の順列の集合

$$\begin{aligned} P_3 = \Big\{ &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Big\} \end{aligned} \tag{381}$$

である. また, 3 次の順列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{382}$$

は $\sigma \in P_3$ であるが, 2 次の順列

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{383}$$

はは $\tau \notin P_3$ である.

5. 行列式の例

- 2 次正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{384}$$

の行列式は

$$\begin{aligned}
\left|\hat{A}\right| &= \mathrm{sgn}((1,2))a_{11}a_{22} + \mathrm{sgn}((2,1))a_{12}a_{21} && (385)\\
&= \mathrm{sgn}((1,2))1 \times 1 + \mathrm{sgn}((2,1))2 \times 0 && (386)\\
&= \mathrm{sgn}((1,2))1 && (387)\\
&= 1 \times 1 = 1 && (388)
\end{aligned}$$

- 3 次正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{389}$$

の行列式は

$$\begin{aligned}
\left|\hat{A}\right| &= \mathrm{sgn}((1,2,3))a_{11}a_{22}a_{33} + \mathrm{sgn}((2,1,3))a_{12}a_{21}a_{33}\\
&\quad + \mathrm{sgn}((3,2,1))a_{13}a_{22}a_{31} + \mathrm{sgn}((1,3,2))a_{11}a_{23}a_{32}\\
&\quad + \mathrm{sgn}((2,3,1))a_{12}a_{23}a_{31} + \mathrm{sgn}((3,1,2))a_{13}a_{21}a_{32} && (390)\\
&= \mathrm{sgn}((1,2,3))1 \times 1 \times 1 + \mathrm{sgn}((2,1,3))2 \times 0 \times 1\\
&\quad + \mathrm{sgn}((3,2,1))1 \times 1 \times 0 + \mathrm{sgn}((1,3,2))1 \times 2 \times 2\\
&\quad + \mathrm{sgn}((2,3,1))2 \times 2 \times 0 + \mathrm{sgn}((3,1,2))1 \times 0 \times 1 && (391)\\
&= \mathrm{sgn}((1,2,3))1 + \mathrm{sgn}((1,3,2))4 && (392)\\
&= 1 \times 1 + (-1) \times 4 = -3 && (393)
\end{aligned}$$

補足 7　行列式の性質と計算

- 行列式の計算を定義から行うのは困難．ところが, 行列のように行基本変形から容易に計算できる．それは次の二つの事実を用いる．

  1. 行列式は行基本変形で以下の様に変形される．n 次正方行列 $\hat{A} = (a_{ij})$ を考える．

     (a) ある行 (i 行目とする) を定数 k 倍すると行列式は k 倍される．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{394}$$

     – 例 2 次の正方行列

$$\hat{A} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{395}$$

       に対して 1 行目を 2 倍した行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{396}$$

       の行列式を考えると,

$$|\hat{A}'| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\times 1 & 2\times 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2|\hat{A}| \tag{397}$$

       実際, $|\hat{A}'| = 2$ で $|\hat{A}| = 1$ であるから満たされている．

     – 例 3 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{398}$$

       に対して 2 行目を 2 倍した行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{399}$$

       の行列式を考えると,

$$|\hat{A}'| = 2|\hat{A}| \tag{400}$$

       実際, $|\hat{A}'| = -6$ で $|\hat{A}| = -3$ であるから満たされている．

(b) ある行の定数 k 倍を別の行に足しても行列式は変わらない.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \dots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{401}$$

– 例 2 次の正方行列

$$\hat{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{402}$$

に対して 2 行目を 2 倍した行を 1 行目に足した行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{403}$$

の行列式を考えると,

$$|\hat{A}'| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+0 & 2+2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |\hat{A}| + 2\times 0 = |\hat{A}| \tag{404}$$

実際, $|\hat{A}'| = 1$ で $|\hat{A}| = 1$ であるから満たされている.

– 例 3 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{405}$$

に対して 2 行目を 2 倍したものを 1 行目に足した行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{406}$$

の行列式を考えると,

$$|\hat{A}'| = |\hat{A}| \tag{407}$$

実際, $|\hat{A}'| = -3$ で $|\hat{A}| = -3$ であるから満たされている.

(c) 二つの行を入れ替えると行列式の符号が変わる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {\color{blue}a_{j1}} & {\color{blue}a_{j2}} & \dots & {\color{blue}a_{jn}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {\color{red}a_{i1}} & {\color{red}a_{i2}} & \dots & {\color{red}a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {\color{red}a_{i1}} & {\color{red}a_{i2}} & \dots & {\color{red}a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {\color{blue}a_{j1}} & {\color{blue}a_{j2}} & \dots & {\color{blue}a_{jn}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{408}$$

– 例 2 次の正方行列

$$\hat{A} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{409}$$

に対して 1 行目と 2 行目を入れ替えた行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{410}$$

の行列式を考えると,

$$|\hat{A}'| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -|\hat{A}| \tag{411}$$

実際, $|\hat{A}'| = -1$ で $|\hat{A}| = 1$ であるから満たされている.

– 例 3 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{412}$$

に対して 1 行目と 2 行目を入れ替えた行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{413}$$

の行列式を考えると,

$$|\hat{A}'| = -|\hat{A}| \tag{414}$$

実際, $|\hat{A}'| = 3$ で $|\hat{A}| = -3$ であるから満たされている.

2. 第一列の成分で 0 出ないものが a_{11} のみの時 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{415}$$

$\hat{A}$ の行列式は

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}|\hat{C}| \end{aligned} \tag{416}$$

ただし,

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{417}$$

– 例 2 次の正方行列

$$\hat{A} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{418}$$

に対して 1 次小さい行列

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \tag{419}$$

との対応を考えると,

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times |\hat{C}| = 1 \tag{420}$$

実際,

– 例 3 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{421}$$

に対して 1 次小さい行列

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{422}$$

の行列式との対応を考えると,

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times |\hat{C}| = -3 \tag{423}$$

実際, $|\hat{C}| = -3$ で $|\hat{A}| = -3$ であるから満たされている.

3. 行列式の計算の仕方
   上の二つを用いると, 以下の手順で計算できる.
   (a) 行基本変形で行列式を式 (415) の形にする.
   (b) (416) を使って行列式の次数を一つ減らす

   これを行列式の次数が 1 になるまで繰り返す.

– 例 3 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{424}$$

に対して,

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 1 \times \begin{vmatrix} -3 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times -3 = -3 \end{aligned} \tag{425}$$

– 例 4 次の正方行列

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \end{vmatrix} &= 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 \\ -1 & 11 & 4 \\ 4 & 8 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 0 & 16 & 4 \\ 0 & -12 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times -1 \times \begin{vmatrix} 16 & 4 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times -1 \times 4 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times -1 \times 4 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times -1 \times 4 \times 4 \times |8| = 1 \times -1 \times 4 \times 4 \times 8 \\ &= -128 \end{aligned} \tag{426}$$

– 三角行列 $\hat{A}$ の行列式は

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{4n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{427}$$

は先の計算を繰り返すと,

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & \color{red}{a_{22}} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \color{blue}{a_{23}} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{4n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \color{green}{a_{nn}} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} \color{red}{a_{22}} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & \color{blue}{a_{23}} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ 0 & 0 & \ddots & a_{4n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \color{green}{a_{nn}} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\color{red}{a_{22}} \begin{vmatrix} \color{blue}{a_{23}} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} & \\ 0 & \ddots & a_{4n-1} & a_{4n} & \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} & \end{vmatrix} \\ &\quad \vdots \\ &= a_{11}\color{red}{a_{22}}\color{blue}{a_{33}} \cdots \color{yellow}{a_{n-1n-1}}\color{green}{a_{nn}} \\ &= \prod_i a_{ii} \end{aligned} \tag{428}$$

となる.

- 行列式の行基本変形の証明

1. (a) ある行を定数 k 倍すると行列式は k 倍される．$\hat{A} = (a_{ij})$ の i 行目が k 倍されている行列を $\hat{A}'$ とすると，定義より

$$
\begin{aligned}
|\hat{A}'| &= \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots k a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= k \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= k|\hat{A}| \qquad (429)
\end{aligned}
$$

   (b) ある行の定数 k 倍を別の行に足しても行列式は変わらない．この証明には (c) を用いる．まず，$\hat{A} = (a_{ij})$ の i 行目に j 行目の k 倍した行列の行列式 $|A'|$ を考えると，

$$
\begin{aligned}
|A'| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} + k a_{j1} & \cdots & a_{in} + k a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots \left(a_{i\sigma(i)} + k a_{j\sigma(j)} \right) \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&+ k \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (430)
\end{aligned}
$$

   第二項では i 行目と j 行目が同じ $(a_{j1} \cdots a_{jn})$ になっている．ところが i 行目と j 行目が同じ行列式のその二つの行を入れ

替えると (c) より,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{431}$$

と 0 になることが分かる. 従って第二項を 0 と置くことで,

$$|\hat{A}'| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 = |\hat{A}| \tag{432}$$

(c) 二つの行を入れ替えると行列式の符号が変わる. $\hat{A} = (a_{ij})$ の i 行目に j 行目が入れ替わった行列を $\hat{A}'$ とすると,

$$\begin{aligned} |\hat{A}'| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(j) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(n)) \\ &\times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(j) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(n)) \\ &\times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned} \tag{433}$$

一方,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(j)\sigma(i+1)\sigma(i+2)\cdots\sigma(i)\cdots\sigma(n)) \\
&= -1\times\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(i+1)\sigma(j)\sigma(i+2)\cdots\sigma(i)\cdots\sigma(n)) \\
&= (-1)^2\times\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(i+1)\sigma(i+2)\sigma(j)\cdots\sigma(i)\cdots\sigma(n)) \\
&= (-1)^{(j-i)}\times\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(i+1)\sigma(i+2)\cdots\sigma(i)\sigma(j)\cdots\sigma(n)) \\
&= (-1)^{(j-i)}\times(-1)^{(j-i-1)}\times\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(i)\sigma(i+1)\sigma(i+2)\cdots\sigma(j)\cdots\sigma(n)) \\
&= -\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(i)\sigma(i+1)\sigma(i+2)\cdots\sigma(j)\cdots\sigma(n))
\end{aligned}
\tag{434}
$$

従って,

$$
\begin{aligned}
|\hat{A}'| &= \sum_{\sigma\in P_n}\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(j)\cdots\sigma(i)\cdots\sigma(n)) \\
&\times a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{j\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= -\sum_{\sigma\in P_n}\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(i)\cdots\sigma(j)\cdots\sigma(n)) \\
&\times a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{j\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= -|\hat{A}|
\end{aligned}
\tag{435}
$$

- 第一列の成分で 0 出ないのが a_{11} のみの場合の証明

1. 次のような行列式 $|\hat{A}|$ を考える．

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \tag{436}$$

この行列式は必ず定義の数ある項の中で一行目から a_{11} を選ぶ項のみが 0 でない．そのような a_{11} を含む項はすでに 1 行目から成分を選んでいるため b_{1i} のいずれかの成分を含めない．従って

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(1, \sigma(2) \cdots \sigma(n)) a_{11} c_{2\sigma(2)} c_{3\sigma(3)} \cdots c_{n\sigma(n)} \tag{437}$$

ここで $\mathrm{sgn}(1, \sigma(2) \cdots \sigma(n))$ は最初の 1 が固定されているため, $\mathrm{sgn}(\sigma(2) \cdots \sigma(n))$ と実質同じになる．　結果として,

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= a_{11} \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma(2) \cdots \sigma(n)) c_{2\sigma(2)} c_{3\sigma(3)} \cdots c_{n\sigma(n)} \\ &= a_{11} |\hat{C}| \end{aligned} \tag{438}$$

ただし,

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{439}$$

補足 8　余因子展開と逆行列

1. 行列式の多重線形性
   k と l をある定数としたとき次の行列式の関係式が成立する.

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
ka_{i1}+lb_{i1} & ka_{i2}+lb_{i2} & \cdots & ka_{in}+lb_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= k \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+ l \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\tag{440}
$$

   - 2 次の正方行列の例

$$
\begin{vmatrix}
1 & 2 \\
2\times 1+3\times 1 & 2\times 2+3\times 3
\end{vmatrix}
= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}
\tag{441}
$$

   右辺と左辺はともに 3 である.

   - 2 次の正方行列の例 2

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\
&= (a_{11}a_{22} - 0\times a_{21}) + (0\times a_{22} - a_{12}a_{21}) \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{442}
$$

2. 1 行目の余因子展開
   n 次正方行列 $\hat{A} = (a_{ij})$ の行列式は定義より,

$$
|\hat{A}| = \sum_{\sigma\in P_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \tag{443}
$$

これは 1 行目の成分を和の前に出し, sgn(σ) でも一番先頭へ持ってくることで次のようにも書ける.,

$$
\begin{aligned}
|\hat{A}| &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{j-1} \sum_{\sigma' \in P_(n-1)} \mathrm{sgn}(\sigma') a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\tilde{a}_{1j} \qquad (444)
\end{aligned}
$$

この展開式を余因子展開と呼ぶ. ここで

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_{1j} &= (-1)^{j-1} \sum_{\sigma' \in P_(n-1)} \mathrm{sgn}(\sigma') a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (445)
\end{aligned}
$$

を余因子と呼ぶ.

- 例 2 次の正方行列

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\
&= a_{11}(-1)^{1-1}|a_{22}| + a_{12}(-1)^{2-1}|a_{21}| \\
&= a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} \qquad (446)
\end{aligned}
$$

ただし,

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1-1}|a_{22}| \qquad (447)$$

$$\tilde{a}_{12} = (-1)^{2-1}|a_{21}| \qquad (448)$$

- 例 3 次の正方行列

行列の多重線形性を用いて,

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1-1} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2-1} \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&+ (-1)^{3-1} \begin{vmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & a_{22} & a_{32} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2-1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & a_{22} & a_{32} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&+ (-1)^{3-1} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & a_{22} & a_{32} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(-1)^{1-1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{2-1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&+ a_{13}(-1)^{3-1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{13}\tilde{a}_{13} \qquad (449)
\end{aligned}
$$

3. i 行目の余因子展開

i 行目に対しても同じように余因子展開ができる．これは i 行目の成分を和の前に出し, $\mathrm{sgn}(\sigma)$ でも一番先頭へ持ってくることで次のよう書くことで行える.,

$$|\hat{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{ij} \tag{450}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{ij} &= (-1)^{i+j} \sum_{\sigma' \in P_(n-1)} \mathrm{sgn}(\sigma') a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i-11} & a_{i-12} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\
a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

- 例 2 次の正方行列

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\
&= a_{22}(-1)^{2+2}|a_{11}| + a_{21}(-1)^{2+1}|a_{12}| \\
&= a_{22}\tilde{a}_{22} + a_{21}\tilde{a}_{21} \qquad (451) \\
&= a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12}
\end{aligned}$$

$$\tag{452}$$

ただし,

$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1}|a_{12}| \tag{453}$$

$$\tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2}|a_{22}| \tag{454}$$

- 例 3 次の正方行列

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{13}\tilde{a}_{13} \\
&= a_{21}\tilde{a}_{21} + a_{22}\tilde{a}_{22} + a_{23}\tilde{a}_{23} \\
&= a_{31}\tilde{a}_{31} + a_{32}\tilde{a}_{32} + a_{33}\tilde{a}_{33}
\end{aligned}$$

4. 余因子と逆行列

n 次正方行列 $\hat{A}$ が正則ならば逆行列 A^{-1} は余因子を用いて次のように書ける.

$$\hat{A}^{-1} = \frac{\hat{\hat{A}}}{|\hat{A}|} \tag{455}$$

ただし $\hat{\hat{A}}$ は余因子行列であり,

$$\hat{\hat{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \dots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \tag{456}$$

である.

- 2 次の正則行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{457}$$

に対して, 次の行列を考える.

$$\begin{aligned} |\hat{A}|I_2 &= \begin{pmatrix} |\hat{A}| & 0 \\ 0 & |\hat{A}| \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} & a_{11}\tilde{a}_{21} + a_{12}\tilde{a}_{22} \\ a_{21}\tilde{a}_{11} + a_{22}\tilde{a}_{12} & a_{21}\tilde{a}_{21} + a_{22}\tilde{a}_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} \\ &= \hat{A}\hat{\hat{A}} \end{aligned} \tag{458}$$

従って両辺を $|\hat{A}|$ で割り左から $\hat{A}^{-1}$ を掛けると

$$\hat{A} = \frac{\hat{\hat{A}}}{|\hat{A}|} \tag{459}$$

演習 1　演習: 行列とベクトルの積

以下のベクトルと行列の積を計算せよ．次の行列 $\hat{A}$ とベクトル $\boldsymbol{c}$ の積を計算せよ．

1.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

演習 1.1　回答

1.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

演習２　演習: 連立１次方程式の解法

以下の連立１次方程式に対して次の問いに答えよ.

- 係数行列 $\hat{A}$ を階段行列 $\hat{B}$ へ変形することで, 拡大係数行列 $(\hat{A} \quad \boldsymbol{b})$ を $(\hat{B} \quad \boldsymbol{d})$ の形に変形せよ. そして係数行列 $\hat{A}$ の階数 $r(\hat{A})$ を求め, 解の有無を答えよ.
- 解がある場合はピボットではない未知数 $c_1, c_2, \ldots$ を含む形で求めよ.

1.

$$\begin{cases} 3x & +2y & -z & = & -15 \\ 5x & +3y & +2z & = & 0 \\ 3x & +y & +3z & = & 11 \\ 11x & +7y & & = & -30 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2x & +5y & = & 2 \\ x & +3y & = & -2 \\ x & +3y & = & 3 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 2w & -4x & +y & +z & = & 0 \\ w & -5x & +2y & -2z & = & 0 \\ w & +3x & & +4z & = & 0 \\ w & -2x & -y & +z & = & 0 \end{cases}$$

演習 2.1　回答

1.

$$\begin{pmatrix}\hat{A} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 15 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ 11 & 7 & 0 & -30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\hat{C} & \boldsymbol{d}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -6 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って,

$$r(\hat{A}) = 3$$

である．また, $r(\hat{A}) = 3$ であり, かつ, $d_4 = 0$ であるので解は存在する．さらに, 未知数の数 (もしくは $\hat{A}$ の列の数) が n=3 である．
従って, $r(\hat{A}) = n$ であり定理 2.4 から解は一意である．
その解は $\boldsymbol{d}$ より,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix}\hat{A} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\hat{C} & \boldsymbol{d}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

従って,

$$r(\hat{A}) = 1$$

である．また, 階段行列 $(\hat{C} \;\; \boldsymbol{d})$ を見ると, $r(\hat{A}) = 1$ であるが $d_2 \neq 0$ であり定理 2.4 から解は存在しない．

3.

$$\begin{pmatrix}\hat{A} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\hat{C} & \boldsymbol{d}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って,

$$r(\hat{A}) = 3$$

である．また, $r(\hat{A}) = 3$ であり, かつ, 未知数の数 (もしくは $\hat{A}$ の列の数) が $n = 4$ である．従って, $n - r(\hat{A}) = 1$ であり, かつ, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ であるから定理 2.5 から解は未知変数 c を一つ含む形で存在する．

対応する連立一次方程式は,

$$\begin{cases} w & & & 2z & = & 0 \\ & x & & \frac{2}{3}z & = & 0 \\ & & y & -\frac{1}{3}z & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

ピボットでない未知数を $z = c$ とすると解は,

$$\begin{cases} w & = & -2c \\ x & = & -\frac{2}{3}c \\ y & = & \frac{1}{3}c \\ z & = & c \end{cases}$$

となる．

演習 3　演習: 行列の演算

1. 次の行列 $\hat{A}$, $\hat{B}$ に対して $3\hat{A} - \hat{B}^2$ をせよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 次の二つの行列は可換か判定せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. 次の行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の積を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 5 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

4. 次の行列 $\hat{A}$ のべき乗 $\hat{A}^3$ を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

5. 行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ のを計算 ${}^t(\hat{A}\hat{B})$ せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. 行列 $\hat{A}$ が正則か判定せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. 行列 $\hat{A}$ の逆行列 $\hat{A}^{-1}$ を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. 行列 $\hat{B}$ を対称行列 $\hat{S}$ と反対称行列 $\hat{A}$ の和 $\hat{S} + \hat{A}$ で表せたとき, $\hat{S}$ と $\hat{A}$ を求めよ.

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

演習 3.1　回答

1.

$$3\hat{A}+\hat{B}^2=\begin{pmatrix}2&6&4\\3&-1&3\\0&6&2\end{pmatrix}.$$

2. 可換

3.

$$\hat{A}\hat{B}=\begin{pmatrix}-2&-4&-4\\6&8&-12\\-4&-4&14\end{pmatrix}.$$

4.

$$\hat{A}^3=\begin{pmatrix}1331&0&3993\\0&0&0\\0&0&1331\end{pmatrix}$$

5.

$${}^t(\hat{A}\hat{B})=\begin{pmatrix}2&0&2\\2&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}.$$

6. 正則ではない.

7.

$$\hat{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\2&-1&0&-2\\-1&1&-1&1\\-2&1&0&1\end{pmatrix}.$$

8.

$$\hat{S}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\qquad \hat{A}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

演習 4　演習: 行列の演算と行列式

1. 次の行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の和を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. 次の行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の積を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. 次の行列 $\hat{A}$ の三乗を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. 次の行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ に対して,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   $\hat{P}$ が

$$\hat{P}\hat{A} = \hat{B}$$

   を満たすとき, 行列 $\hat{P}$ を与えよ.

5. 次の行列 $\hat{A}$ の逆行列 $\hat{A}^{-1}$ を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 6 \\ 1 & 7 & -1 \\ 2 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. 次の行列 $\hat{A}$ の行列式 $|\hat{A}|$ を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. 次の行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の積の行列式 $|\hat{A}\hat{B}|$ を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

※ヒント: 行列の積の行列式の性質と問題 6 の結果を使うと楽.

8. 次の行列 $\hat{A}$ の三乗の行列式を $|\hat{A}^3|$ を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

※ヒント: 行列の積の行列式の性質と行列式の多重線形性, 問題 7 の途中結果を使うと楽.

9. 次の行列 $\hat{A}$ の行列式余因子 $\tilde{a}_{13}$ と $\tilde{a}_{32}$ を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 6 \\ 1 & 7 & -1 \\ 2 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. 次の行列（直行行列もしくは回転行列）$\hat{R}(\theta)$

$$\hat{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

に対して次の四つの計算をせよ.

(a) $|\hat{R}(\theta)|$
※ヒント: ピタゴラスの定理 $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

(b) $\hat{R}(\theta)\hat{R}(-\theta)$
※ヒント: sin は奇関数, cos は偶関数

(c) $\hat{R}(\theta)^t\hat{R}(\theta)$
※ヒント: 転置した後に $\hat{R}(-\theta)$ と見比べよ.

(d) $\hat{R}(\theta)^{-1}$
※ヒント: (b), (c) から推測できる

演習 4.1　回答

1.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.

$$\begin{pmatrix} -33 & -39 & 53 \\ 5 & 6 & -8 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

6.

$$2.$$

7.

$$0.$$

8.

$$1.$$

9.

$$\tilde{a}_{13} = -2, \qquad \tilde{a}_{32} = 8.$$

10. (a) 1
    (b) $\hat{I}_2$
    (c) $\hat{I}_2$
    (d) $t^R(\theta)$ もしくは $R(-\theta)$

演習 5　演習: 行列の演算と行列式 2

1. 次の行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の和を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. 次の行列の積を計算せよ.

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

※ $\hat{A}$ は Walsh-Hadamard 変換の例で情報の符号化に用いられる.

3. 次の行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

に対して次の式を満たす

$$\hat{P}\hat{A} = \hat{B}$$

行列 $\hat{P}$ を答えよ.
※ヒント: $\hat{P}$ は二つの行基本変形の積で表すことができる.

4. 次の行列 $\hat{A}$ の逆行列を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -2 \\ 3 & -9 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. 次の行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

に対して

$$\hat{A}\left(\hat{B}\hat{A}\right)^{-1}$$

を計算せよ. ※ヒント: 逆行列の性質を用いよ.

6. 次の行列 $\hat{A}$ の行列式を計算せよ

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -2 \\ 3 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

7. 行列式の値が 27 の 3 次行列を与えよ

8. 次の行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

に対して

$$|\hat{A}| \left| \left(\hat{B}\hat{A} \right)^{-1} \right|$$

を計算せよ.

※ヒント: 行列の積の行列式, 逆行列の行列式の性質を利用せよ.

9. 次の行列 $\hat{A}$ の 2 行目の余因子展開を書き下せ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -2 \\ 3 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

10. 次の列ベクトル $\boldsymbol{a}$ を考える.

$$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y.$$

ただし,

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{460}$$

とする. 次の回転行列 $\hat{R}(\theta)$

$$\hat{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

に対して,

(a) $\hat{R}(\frac{\pi}{2})$ を $\boldsymbol{a}$ にかけたときの列ベクトル $\boldsymbol{a}'$ を答え , $\boldsymbol{e}_x$ と $\boldsymbol{e}_y$ を用いて表せ.

(b) $\hat{R}(\frac{\pi}{4})$ を $\boldsymbol{a}$ にかけたときの列ベクトル $\boldsymbol{a}''$ を答え , $\boldsymbol{e}_x$ と $\boldsymbol{e}_y$ を用いて表せ.

(c) 三つの列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{a}''$ のそれぞれに対して, $\boldsymbol{e}_x$ と $\boldsymbol{e}_y$ の係数を二次元平面上に図示せよ.

演習 5.1　回答

1.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. 行列 $\hat{A}$ は正則ではなく逆行列は存在しない.

5.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.

$$-3$$

7. 無数の例がある. 一例,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

8.

$$-\frac{1}{3}$$

9.

$$\hat{A} = 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -9 & -3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -9 \end{vmatrix}$$

10. (a)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 2\sqrt{2}\boldsymbol{e}_x + 0\boldsymbol{e}_y$$

(c) 図の通り

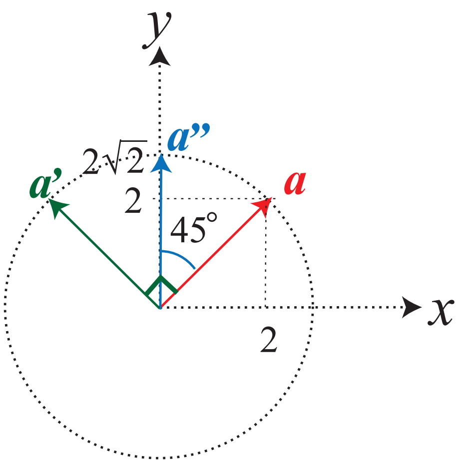

図 1:

演習 6　演習: 行列の演算と行列式 3

1. 次の行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の和と積を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 以下の行列の逆行列を答えよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. 次の行列の行列式の値を答えよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. 行列式の値が 42 で 3 行 1 列成分が 0 ではない行列を与えよ.

5. 次の行列 $\hat{A}$, $\hat{B}$ と $\hat{C}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

に対し, 次の式を計算せよ

$$\hat{B}^{-1} \left[{}^t \left(\hat{A}^{-1} \hat{C}^t \hat{B} \right) \right] {}^t \hat{A}$$

.

6. 次の行列 $\hat{A}$, $\hat{B}$ と $\hat{C}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

に対し, 次の行列式を計算せよ

$$\left| \hat{B}^{-1} \right| \left| {}^t \left(\hat{A}^{-1} \hat{C}^{-2} \hat{B} \right) \right| \left| \hat{A} \right|$$

.

7. 次の行列 $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$,

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ただし, $i = \sqrt{-1}$ とする. これらに対して, 以下の行列のペアは可換か答えよ.

(a)

$$\hat{\sigma}_x, \quad \hat{\sigma}_z$$

(b)

$$\hat{\sigma}_y, \quad \hat{\sigma}_z$$

※これらの行列は Pauli 行列と呼ばれ, 量子ビット素子を表すのに用いられる.

8. 先の問題の行列 $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$, に対して, 次を満たす行列 $\hat{P}_a$, $\hat{P}_b$ をそれぞれ答えよ. そして, それぞれを $\hat{\sigma}_z$ を用いて表せ.

(a)

$$\hat{P}_a \sigma_x = \sigma_y$$

(b)

$$\hat{P}_b \sigma_y = -\sigma_x$$

※ $\hat{P}$ は二つの行のスカラー倍の積で書ける.

9. 先の問題の行列 $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$, に対して, 以下の演算を計算し, $\hat{I}_2$, $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ を用いて表せ.

(a)

$$\hat{\sigma}_y^2$$

(b)

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z$$

(c)

$$\left(\hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_y\right)\left(\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y\right).$$

10. 以下の回転行列

$$\hat{R}(\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

と列ベクトル

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$$

を考えたとき次の列ベクトル $\boldsymbol{a}$ を $a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y$ の形に表せ.

(a) $\boldsymbol{a} = \hat{R}(\pi)\hat{R}(-\pi/2)\boldsymbol{e}_x$

(b) $\boldsymbol{a} = \hat{R}(\pi/2)\hat{R}(\pi/2)\,(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$

(c) またこのとき次の θ を計算せよ.

$$\hat{R}(\theta) = \hat{R}(\pi/2)\hat{R}(\pi/2)$$

(d) $-i\sigma_z(\sigma_x + \sigma_y)$ を計算し, $\hat{R}(\pi/2)$ との関係を述べよ.

※ (c) ヒント 加法定理 $\cos(\psi+\phi) = \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\sin\phi$ と $\sin(\psi+\phi) = \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\phi$ を用いる.

演習 6.1　回答

1.

$$\hat{A}+\hat{B}=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&6&0\\3&6&1\end{pmatrix},\qquad \hat{A}\hat{B}=\begin{pmatrix}5&7&1\\5&7&3\\11&16&4\end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix}-4&-3&-1&3\\1&1&0&0\\3&2&1&-2\\1&0&0&-1\end{pmatrix}$$

3. 1

4. 　無数にあるが. 一例.

$$\begin{pmatrix}5&0&-2&0\\0&3&0&-1\\2&0&2&0\\7&0&0&1\end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{aligned}\hat{B}^{-1}\left[{}^t\left(\hat{A}^{-1}\hat{C}^t\hat{B}\right)\right]{}^t\hat{A}&=\hat{B}^{-1t}\left({}^t\hat{B}\right){}^t\left(\hat{A}^{-1}\hat{C}\right){}^t\hat{A}\\&=\hat{I}_3{}^t\hat{C}^t\left[\hat{A}^{-1}\right]{}^t\hat{A}\\&={}^t\hat{C}^t\left(\hat{A}\hat{A}^{-1}\right)\\&={}^t\hat{C}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&3&2\\0&1&2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\left|\hat{B}^{-1}\right|\left|{}^t\left(\hat{A}^{-1}\hat{C}^{-2}\hat{B}\right)\right|\left|\hat{A}\right|&=\left|\hat{B}^{-1}\right|\left|\hat{A}^{-1}\hat{C}^{-2}\hat{B}\right|\left|\hat{A}\right|\\&=\left|\hat{B}^{-1}\right|\left|\hat{A}^{-1}\right|\left|\hat{C}^{-2}\right|\left|\hat{B}\right|\left|\hat{A}\right|\\&=\left|\hat{B}\right|^{-1}\left|\hat{A}\right|^{-1}\left|\hat{C}\right|^{-2}\left|\hat{B}\right|\left|\hat{A}\right|\\&=\left|\hat{C}\right|^{-2}=2^{-2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

.

7. (a)

$$\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

より $\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z = -\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x$ となり非可換.

(b) 同様に,

$$\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

より $\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z = -\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y$ となり非可換.

8. (a)

$$\hat{P}_a = \hat{P}_1(-i)\hat{P}_2(i) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i\hat{\sigma}_z$$

(b) 同様にすると

$$\hat{P}_b = \hat{P}_1(-i)\hat{P}_2(i) = -i\hat{\sigma}_z = \hat{P}_a$$

9. (a)

$$\hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$i\hat{I}_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

(c)

$$2(\hat{I}_2 + i\hat{\sigma}_z) = \begin{pmatrix} 2+2i & 0 \\ 0 & 2-2i \end{pmatrix}$$

10. (a)

$$\boldsymbol{a} = \hat{R}(\pi)\hat{R}(-\pi/2)\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y = 0\boldsymbol{e}_x + 1\boldsymbol{e}_y$$

※ $-90°$ 回転のあと $180°$ 回転したので合計で $90°$ だけ $\boldsymbol{e}_x$ が回り, $\boldsymbol{e}_{\mathrm{y}}$ になった.

(b)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \hat{R}(\pi/2)\hat{R}(\pi/2)\left(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y\right) \\ &= \hat{R}(\pi/2)\left(\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_x\right) \\ &= -\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y \end{aligned}$$

(c) $\theta = \pi$

(d) $-i\hat{\sigma}_z(\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y) = \hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_x$ となる．ここから，$\hat{\sigma}_x \leftrightarrow \boldsymbol{e}_x$, $\hat{\sigma}_y \leftrightarrow \boldsymbol{e}_y$ と対応付けると，$-i\hat{\sigma}_z \leftrightarrow \hat{R}(\pi/2)$ と関係づけられる．もっと一般には $\hat{R}(\theta) \leftrightarrow \cos\theta\,\hat{I}_2 - i\sin\theta\,\hat{\sigma}_z = \exp[-i\theta\hat{\sigma}_z]$ となる．