ベクトルと行列1 (担当 松下勝義)

0.1 概要

- 前期の内容

前期の概要

連立一次方程式が解ける

$\Updownarrow$

正方な係数行列の場合に逆行列を持つ (正則行列)

- 授業の流れ

1. ベクトルの演算
2. 連立一次方程式 $\Leftrightarrow$ 行列とベクトルでの表現
3. 行列の演算と逆行列
4. 連立一次方程式の解ける条件
5. 掃き出し法
6. 逆行列の計算とそれによる連立一次方程式の解法

- 前期の達成目標

前期の達成目標 (後期の線形代数 II に必要)

1. ベクトルと行列の演算ができる.
2. 連立一次方程式が這い出し法で解ける.
3. 正方行列の場合に逆行列をが計算できる.

ベクトルと行列 1 (担当 松下勝義)

1-I. 平面ベクトルと空間ベクトル

1-I-0. 行列とベクトル (10 分, p.78)

この授業では連立一次方程式,

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

を考える. この連立一次方程式は左辺の未知変数 x, y がつくるベクトル,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2}$$

と右辺の値, b_1 と b_2 が作るベクトル,

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

, 並びに, 行列 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{4}$$

を用いて,

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{5}$$

と表現できる.

このベクトルと行列の表現法の利点は解が実際には行列 $\hat{A}$ の操作のみで導き出せることが明確になることにある.

この授業ではこの連立一次方程式の表現を学ぶための準備として, まずベクトルの演算の復習を平面ベクトル, 空間ベクトルから始める.

1-I-1. 平面ベクトル (p. 1)

1. 平面ベクトルとその成分

二次元平面上のある点, 始点, からある点, 終点へ向かうベクトルを平面ベクトルと呼ぶ. 例えば, 始点 A と終点 B を

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

としたとき, 二つのベクトルの差,

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

は平面ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と呼ぶ. 参考のためこのベクトルを以下の図 1 に示す.

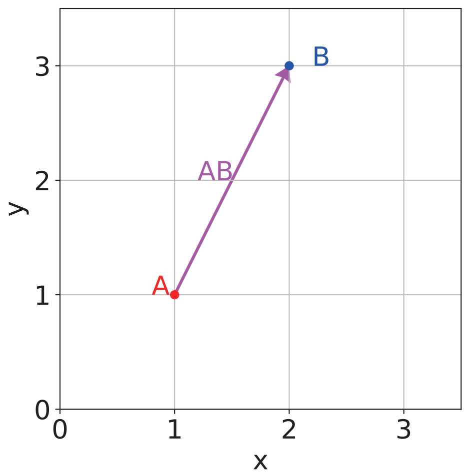

図 1: (1)

このときベクトル $\overrightarrow{OA} = (1, 2)$ の二つの数字の一つ目を第 1 成分, 二つ目を第 2 成分と呼ぶ. 平面を図示したとき (図 1), それを x-y 平面と呼ぶ時がある. そのときは第 1 成分を x 成分, 第 2 成分を y 成分と呼ぶ. 例えば $\overrightarrow{OA}$ の第 $1(x)$ 成分は 1, 第 $2(y)$ 成分は 2 である.

2. 平面ベクトルの同値

二つのベクトルの各成分が一致するとき, それらのベクトルは同じベクトルと見なす. 例えば,

$$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{8}$$

としたとき, $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ は

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \tag{9}$$

と一致する. このように同じになるベクトルを同じベクトルと見なす.

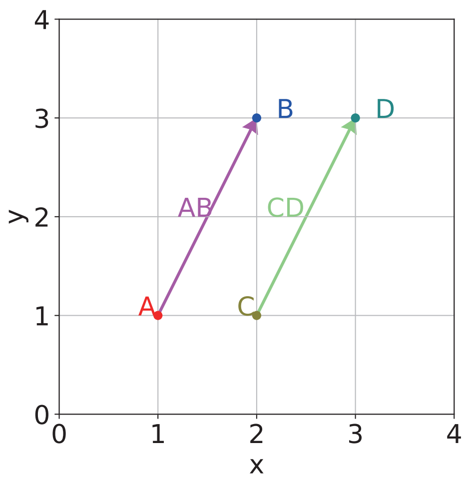

図 2: (2)

3. 位置ベクトルとベクトルの表記

原点 O=(0, 0) を始点とする平面ベクトルを位置ベクトルと呼ぶ. 例えば, 先の点 $A = (1, 1)$ の場合, $\overrightarrow{OA}$ を A の位置ベクトルと呼ぶ. 点 A, B に対し位置ベクトルは,

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

として，

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{12}$$

となる．

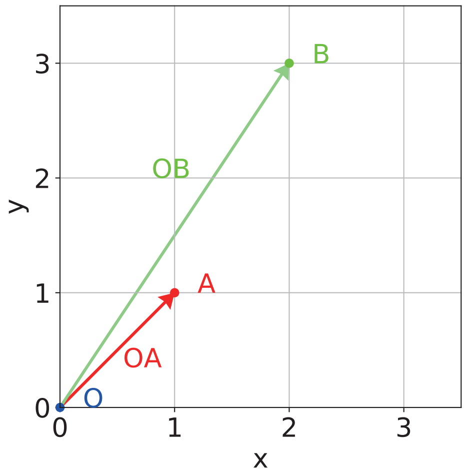

図 3: (3)

ある変数 a をベクトルであることを示すために，太文字 $\boldsymbol{a}$ や矢印 $\vec{a}$ を用いることが多い．授業中に太文字が用いられたものはベクトルである．ここからは表記の簡単さのため，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} \\ \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB} \\ \boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC} \\ \vdots \end{cases} \tag{13}$$

と表記する．また，$\boldsymbol{a}$ の第 1 成分を a_1，第 2 成分 a_2，... と記す．例えば

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

に対して

$$\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 = 3 \end{cases} \tag{15}$$

である．

4. ベクトルの和とスカラー倍

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の和を $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と表記し，それぞれの成分の和として定義する．例えば，

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\\1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \tag{16}$$

である．これを図示すると，このように $a+b$ は A を始点にしてそこへ

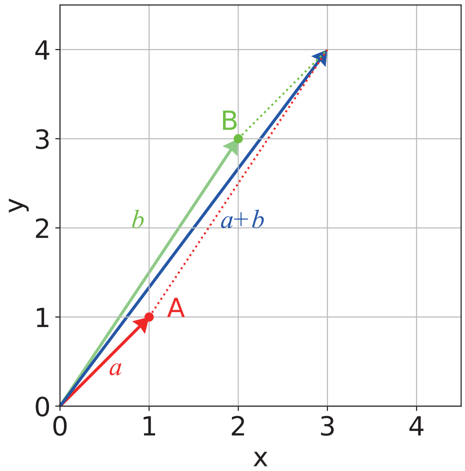

図 4: (4)

$\boldsymbol{b}$ を平行移動し (もしくは B を始点にして $\boldsymbol{a}$ を平行移動), O から平行移動した終点までのベクトルとなる．

ベクトルの和から同じベクトルを何度も足したものを考えることができる．これは通常の数の定数倍と同じものとなる．その定数を k としたとき，各成分を k 倍したものは先の同じベクトルを k 回足すものと一致する．これをスカラー倍と呼ぶ．ここで，このスカラーとはベクトルとは異なり向きを持たない定数の事である．

例えば k_1 を 3 としたとき，

$$k_1\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}k_1\times a_1\\k_1\times a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times 1\\3\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

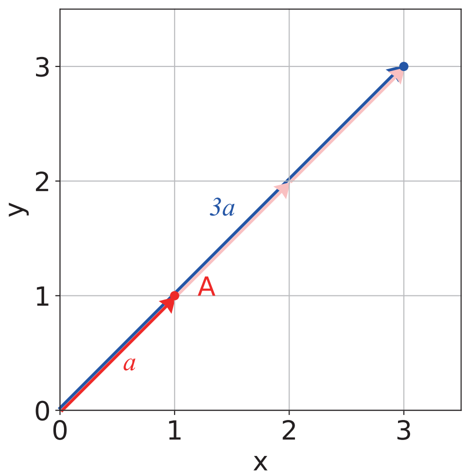

図 5: (4)

これを図示すると, のように $\boldsymbol{a}$ を 3 倍に伸ばしたものになっている.

任意のベクトルのスカラー倍で, 定数を 0 に選ぶと全ての成分が 0 のベクトルができる. このベクトルを零ベクトルと呼ぶ.

$$\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

また任意のベクトルに足して例ベクトルになるベクトルを逆ベクトルと呼ぶ. 例えば $\boldsymbol{a}$ の逆ベクトルは $-\boldsymbol{a}$ と書き, その成分は $\boldsymbol{a}$ のすべての成分の符号を変えたものになる. なぜなら,

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} a_1 + (-a_1) \\ a_2 + (-a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (-1) \\ 1 + (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{20}$$

となるからである.

これらの和とスカラー倍には p. 5 に示すような結合律

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \tag{21}$$

や結合律

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \tag{22}$$

, 及び分配律,

$$k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b} \tag{23}$$

等が成り立つ. 自身で確認しておくこと.

1-I-2. 空間ベクトル (p. 10)

1. 空間ベクトル

平面ベクトルと異なり空間ベクトルは三つの成分を持つ．第 3 成分の事を z 成分と呼ぶことがある．例えばベクトル a, b として

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{24}$$

のようなものを考え図示すると，

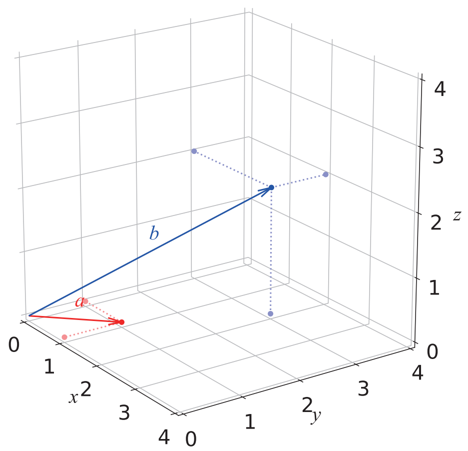

図 6: (6)

これまで平面ベクトルで説明してきたことは空間ベクトルでも成立する．

1-I-3. ベクトルの独立 (p. 15)

1. 一次独立と一次従属

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$ を次のような式を満たすとする．ある定数 $k_a, k_b, k_c, \ldots$ が存在し,

$$k_a\boldsymbol{a} + k_b\boldsymbol{b} + k_c\boldsymbol{c} + \ldots \tag{25}$$

とする．このときこの式の左辺を一次結合と呼び, この一次結合を用いると一次独立と一次従属を定義する．

一次独立と一次従属

一次結合が零ベクトルとなるとき, つまり

$$k_a\boldsymbol{a} + k_b\boldsymbol{b} + k_c\boldsymbol{c} + \cdots = \boldsymbol{0} \tag{26}$$

となるとき,

$$k_a = k_b = k_c = \cdots = 0 \tag{27}$$

のときのみ成立するなら一次独立, そうでないなら一次従属と呼ぶ．

一次独立と一次従属の意味を平面ベクトルで考えてみる．二つのベクトル $\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{f}$ を考える．このとき一次結合は,

$$k_e\boldsymbol{e} + k_f\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \tag{28}$$

とする．もし一次従属なら $k_e \neq 0$, $k_f \neq 0$ となる k_e と k_f が存在するため,

$$\boldsymbol{e} = \frac{k_f}{k_e}\boldsymbol{f} \tag{29}$$

$$\boldsymbol{f} = \frac{k_e}{k_f}\boldsymbol{e} \tag{30}$$

と互いに別のベクトルで表現できる．つまり任意のベクトルが他のベクトルで表現できるという意味がある．

例えば,

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \tag{31}$$

とすれば,

$$2\boldsymbol{e} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \tag{32}$$

であり一次従属である．このとき,

$$\boldsymbol{f} = -2\boldsymbol{e} \tag{33}$$

と $\boldsymbol{f}$ は $\boldsymbol{e}$ が表現できてしまう．これは図示すると,

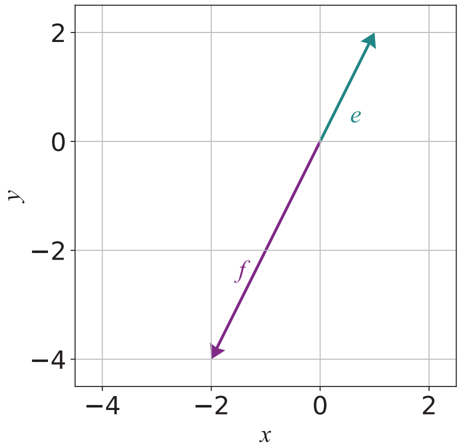

図 7: (6)

2 つのベクトルが平行になっている．3 つ以上のベクトルに関しても同じような平行なベクトルを作る事ができるという意味がある．

一方で, 次の $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{34}$$

の場合は,　図示すると のようになって平行でないため互いに相手のベクトルを表現できない．これが一次独立である．

1-I-4. ベクトルの内積 (p. 16)

1. 内積

平面ベクトルや空間ベクトル同士からベクトルではないスカラー量を作る事ができる．

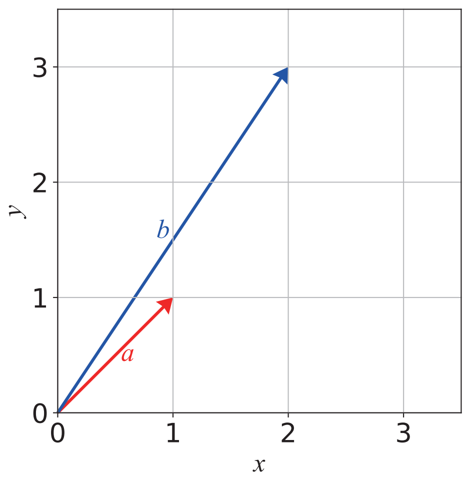

図 8: (1)

ベクトルの内積

二つの平面ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{35}$$

としたとき,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \tag{36}$$

を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積と呼ぶ. 空間ベクトルに対しても同様に,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{37}$$

を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積と呼ぶ.

例として,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{38}$$

$$\tag{39}$$

を考えたとき, その内積は,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 1 \times 2 + 1 \times 3 = 5 \tag{40}$$

である.

2. 内積の性質 (p. 17)

内積は p. 17 に示すような交換律,

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) \tag{41}$$

やスカラー倍

$$k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(k\boldsymbol{b}) \tag{42}$$

, 分配律,

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \tag{43}$$

等が成立するので各自確認する事.

3. ベクトルの大きさ

ベクトル $\boldsymbol{a}$ の自身との内積の平方根 $|\boldsymbol{a}|$ をベクトルの大きさと呼ぶ. つまり,

ベクトルの大きさ

平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対しては,

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}, \tag{44}$$

空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対しては,

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}, \tag{45}$$

をベクトルの大きさと呼ぶ.

式から見て分かるようにピタゴラスの定理と一致する. 例えば,

$$||\boldsymbol{a}||=\sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}=\sqrt{1\times1+1\times1}=\sqrt{2} \tag{46}$$

である.

もしベクトルの大きさが 1 のとき, そのベクトルを単位ベクトルと呼ぶ. 例えば, 以下の平面ベクトルは単位ベクトルである.

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}. \tag{47}$$

あるベクトル $\boldsymbol{a}$ をその大きさ $|\boldsymbol{a}|$ で割ることで $\boldsymbol{a}$ の向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_a$ を作る事ができる. 例えば,

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}})\end{pmatrix} \tag{48}$$

を図示すると,

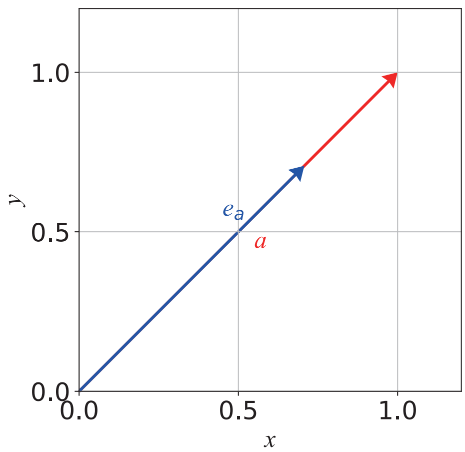

図 9: (9)

4. 内積の計算法

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積は次のようにもかける.

内積の計算法

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成す角度を θ とするとき,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |a||b|\mathrm{cos}\theta \tag{49}$$

である.

これは次のように考えることができる. x 軸を適切にとることで, ベクトル $\boldsymbol{a}$ を x 軸上に向けることができる. このとき,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} |a| \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} |b|\cos\theta \\ |b|\sin\theta \end{pmatrix} \tag{50}$$

となる. 内積は

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |a||b|\cos\theta + 0 \times |b|\sin\theta = |a||b|\cos\theta \tag{51}$$

と計算できる.

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{52}$$

としたとき,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{g} = 1 \times 0 + 1 \times 1 = 1 \tag{53}$$

であるが,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{g} = |a||g| \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{54}$$

とも計算できる.

これを利用して二つのベクトルの直交性を確認できる. もしベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{h}$ が直交していれば, $\cos\theta = 0$ になるため, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{h} = 0$ となる. そのため, 内積が 0 かどうか調べることでベクトルが直交していることが分かる. 例えば,

$$\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{55}$$

$$\tag{56}$$

としたとき, $\boldsymbol{a}$ と直交するかを内積から調べると,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{g} = 1 \times 1 + 1 \times -1 = 0 \tag{57}$$

から直交していることが分かる. 実際図示すると,

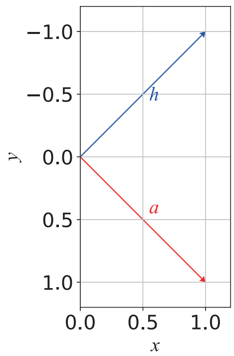

図 10: (10)

のように直交している.

1-I-5 空間ベクトルの外積 (p. 20)

1. 空間ベクトルの外積

二つの空間ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \tag{58}$$

にたいして以下のように外積が定義できる.

空間ベクトルの外積

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \tag{59}$$

である.

例えば,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{60}$$

に対して,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 - 0 \times 3 \\ 0 \times 2 - 1 \times 2 \\ 1 \times 3 - 2 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{61}$$

となる. 図示すると,
となる.

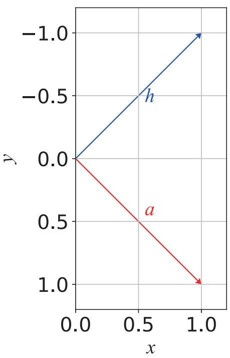

図 11: (9)

2. 外積の大きさ

この外積の大きさを計算すると二つのベクトルを辺とする平行四辺形の面積となる．つまり，

外積の大きさ

空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成す角を θ としたとき，

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |a||b|\sin\theta \tag{62}$$

となる．

証明は難しくないが簡単な例を挙げて確かめよう．例えば次の二つのベクトルを考える．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \tag{63}$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix}1\times 0 - 1\times 0\\ 0\times 0 - 1\times 0\\ 1\times 1 - 1\times 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{64}$$

であるため $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{g}| = 1$ となる．一方で，

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{f}| = |a||f|\sin\theta = \sqrt{2}\times 1\times\sin(\frac{\pi}{4}) = 1 \tag{65}$$

より一致することが分かる．

3. 外積の交換

空間ベクトルの外積では

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} \tag{66}$$

である．実際には次が成り立つ．

外積の交換

空間ベクトルの外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ の間には

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} \tag{67}$$

の関係がある．

これも定義から容易に出せる. 例で考えてみると,

$$\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \times 1 - 0 \times 1 \\ 0 \times 1 - 0 \times 0 \\ 0 \times 1 - 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{f} \tag{68}$$

このことから次の事も言える.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \tag{69}$$

何故ならば $\boldsymbol{a}$ どうしの外積を交換すると $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}$ となるのでこれが成立するのは上記の場合のみだからである.

実際

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \times 0 - 0 \times 1 \\ 0 \times 1 - 1 \times 0 \\ 1 \times 1 - 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{70}$$

4. 外積の性質 (p. 21) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と直交性する.

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0} \tag{71}$$

このほかにも様々な性質を持つので各自確認しておくこと.

1-I-6 三重積

以下の項目については演習時に説明する.

1. スカラー三重積 (レポート問題 I-3. (4))
2. ベクトル三重積 (レポート問題 I-2.)