

補足7 行列式の性質と計算

- 行列式の計算を定義から行うのは困難. ところが, 行列のように行基本変形から容易に計算できる. それは次の二つの事実を用いる.

1. 行列式は行基本変形で以下の様に変形される. n 次正方行列 $\hat{A} = (a_{ij})$ を考える.

(a) ある行 (i 行目とする) を定数 k 倍すると行列式は k 倍される.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (144)$$

(b) ある行の定数 k 倍を別の行に足しても行列式は変わらない.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \dots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (145)$$

(c) 二つの行を入れ替えると行列式の符号が変わる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (146)$$

2. 第一列の成分で 0 出ないものが a_{11} のみの時 \hat{A}

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad (147)$$

\hat{A} の行列式は

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}|\hat{C}| \end{aligned} \quad (148)$$

ただし,

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad (149)$$

つまり, 行列式を計算するときは, 行基本変形で行列式を式 (148) を繰り返して, 行列の次数を小さくしていく事で計算できる.

• 行列式の行基本変形

1. (a) ある行を定数 k 倍すると行列式は k 倍される. $\hat{A} = (a_{ij})$ の i 行目が k 倍されている行列を \hat{A}' とすると, 定義より

$$\begin{aligned} |\hat{A}'| &= \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots k a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= k \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= k |\hat{A}| \end{aligned} \quad (150)$$

- (b) ある行の定数 k 倍を別の行に足しても行列式は変わらない. この証明には (c) を用いる. まず, $\hat{A} = (a_{ij})$ の i 行目に j 行目の k 倍した行列の行列式 $|A'|$ を考えると,

$$\begin{aligned} |A'| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} + k a_{j1} & \cdots & a_{in} + k a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots (a_{i\sigma(i)} + k a_{j\sigma(j)}) \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &\quad + k \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (151)$$

第二項では i 行目と j 行目が同じ ($a_{j1} \cdots a_{jn}$) になっている. ところが i 行目と j 行目が同じ行列式のその二つの行を入れ

替えると (c) より,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (152)$$

と 0 になることが分かる. 従って第二項を 0 と置くことで,

$$|\hat{A}'| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 = |\hat{A}| \quad (153)$$

(c) 二つの行を入れ替えると行列式の符号が変わる. $\hat{A} = (a_{ij})$ の i 行目に j 行目が入れ替わった行列を \hat{A}' とすると,

$$\begin{aligned} |\hat{A}'| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(j) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(n)) \\ &\quad \times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(j) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(n)) \\ &\quad \times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned} \quad (154)$$

一方,

$$\begin{aligned}
& \text{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(j) \sigma(i+1) \sigma(i+2) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(n)) \\
&= -1 \times \text{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(i+1) \sigma(j) \sigma(i+2) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(n)) \\
&= (-1)^2 \times \text{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(i+1) \sigma(i+2) \sigma(j) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(n)) \\
&= (-1)^{(j-i)} \times \text{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(i+1) \sigma(i+2) \cdots \sigma(i) \sigma(j) \cdots \sigma(n)) \\
&= (-1)^{(j-i)} \times (-1)^{(j-i-1)} \times \text{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(i) \sigma(i+1) \sigma(i+2) \cdots \sigma(j) \cdots \sigma(n)) \\
&= -\text{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(i) \sigma(i+1) \sigma(i+2) \cdots \sigma(j) \cdots \sigma(n))
\end{aligned} \tag{155}$$

従つて,

$$\begin{aligned}
|\hat{A}'| &= \sum_{\sigma \in P_n} \text{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(j) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(n)) \\
&\quad \times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= - \sum_{\sigma \in P_n} \text{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(j) \cdots \sigma(n)) \\
&\quad \times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= -|\hat{A}|
\end{aligned} \tag{156}$$

- 第一列の成分で 0 出ないのが a_{11} のみの場合

1. 次のような行列式 $|\hat{A}|$ を考える.

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \quad (157)$$

この行列式は必ず定義の数ある項の中で一行目から a_{11} を選ぶ項のみが 0 でない. そのような a_{11} を含む項はすでに 1 行目から成分を選んでいるため b_{1i} のいずれかの成分を含めない. 従って

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in P_n} \text{sgn}(1, \sigma(2) \cdots \sigma(n)) a_{11} c_{2\sigma(2)} c_{3\sigma(3)} \cdots c_{n\sigma(n)} \quad (158)$$

ここで $\text{sgn}(1, \sigma(2) \cdots \sigma(n))$ は最初の 1 が固定されているため, $\text{sgn}(\sigma(2) \cdots \sigma(n))$ と実質同じになる. 結果として,

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= a_{11} \sum_{\sigma \in P_n} \text{sgn}(\sigma(2) \cdots \sigma(n)) c_{2\sigma(2)} c_{3\sigma(3)} \cdots c_{n\sigma(n)} \\ &= a_{11} |\hat{C}| \end{aligned} \quad (159)$$

ただし,

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad (160)$$

- 計算の例

1. 例題 4.11

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix} \quad (161)$$

2. 三角行列 \hat{A} の行列式は

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{4n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (162)$$

は先の計算を繰り返すと,

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{4n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{23} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ 0 & 0 & \ddots & a_{4n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ 0 & \ddots & a_{4n-1} & a_{4n} \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &\quad \vdots \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{n-1n-1} a_{nn} \\ &= \prod_i a_{ii} \end{aligned} \quad (163)$$

となる.