補足 4　行列の演算

1. $m \times n$ 行列の記法

$$\hat{A} = (a_{ij}) \tag{60}$$

ここで a_{ij} は § 補足 2.2 で定義した i 行 j 列成分.

2. 行列の相等
$m \times n$ 行列 $\hat{A} = (a_{ij})$, $m \times n$ 行列 $\hat{B} = (b_{ij})$ に対して,

$$(a_{ij}) = (b_{ij}) \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i,\ j \tag{61}$$

- 例 (相等)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \hat{A} = \hat{B} \tag{62}$$

- 例 (不等)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \hat{A} \neq \hat{B} \tag{63}$$

3. 行列の和
$m \times n$ 行列 $\hat{A} = (a_{ij})$, $m \times n$ 行列 $\hat{B} = (b_{ij})$ に対して,

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \quad \forall i,\ j \tag{64}$$

- 例

$$\begin{aligned} &\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad \hat{A} + \hat{B} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+0 \\ 3+1 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{65}$$

4. 行列のスカラー倍
$l \times m$ 行列 $\hat{A} = (a_{ij})$ に対して,

$$k\hat{A} = k(a_{ij}) = (ka_{ij}) \quad \forall i,\ j \tag{66}$$

ただし $k = -1$ の場合,

$$(-1)\hat{A} = -\hat{A} \tag{67}$$

と省略する.

- 例

$$k=2, \quad \hat{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2\hat{A}=\begin{pmatrix}2\times 1 & 2\times 2\\ 2\times 3 & 2\times 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix} \tag{68}$$

5. 行列の積
   $l \times m$ 行列 $\hat{A}=(a_{ij})$, $m \times n$ 行列 $\hat{B}=(b_{ij})$ に対して,

$$\hat{A}\hat{B}=(a_{ij})(b_{jk})=(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}) \quad \forall i,\ k. \tag{69}$$

   - 例

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, \quad \hat{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad \hat{A}\hat{B}=\begin{pmatrix}1\times 1+2\times 1 & 1\times 0+2\times 1\\ 3\times 1+4\times 1 & 3\times 0+4\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 7 & 4\end{pmatrix} \tag{70}$$

   - 例

$$\hat{B}\hat{A}=\begin{pmatrix}1\times 1+0\times 3 & 1\times 2+0\times 4\\ 1\times 1+1\times 3 & 1\times 2+1\times 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix} \tag{71}$$

6. 零行列 $\hat{O}$ $m \times n$ 行列 $\hat{O}=(o_{ij})$ が次の形を持つとき零行列とよぶ.

$$o_{ij}=0 \quad \forall i, \quad j \tag{72}$$

   そして $l \times m$ 行列 $\hat{A}$ と $n \times k$ 行列 $\hat{B}$ に対して次の性質を満たす.

$$\hat{A}\hat{O}=\hat{O}' \tag{73}$$
$$\hat{O}\hat{B}=\hat{O}'' \tag{74}$$

   ただし $\hat{O}'$ は $l \times n$ 行列の零行列, $\hat{O}''$ は $m \times k$ 行列の零行列である.

7. n 次正方行列

   $\hat{A}$ が $n \times n$ 行列 $\Rightarrow$ $\hat{A}$ は n 次正方行列

8. 行列の可換
   n 次正方行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ に対して

$$\hat{A}\hat{B}=\hat{B}\hat{A} \tag{75}$$

- 例

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{は可換}$$

$$\text{実際,} \quad \hat{A}\hat{B} = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 0\times 0 & 1\times 0 + 0\times 1 \\ 0\times 2 + 2\times 0 & 0\times 0 + 2\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}\hat{A} = \begin{pmatrix} 2\times 1 + 0\times 0 & 2\times 0 + 0\times 2 \\ 0\times 1 + 1\times 0 & 0\times 0 + 1\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{76}$$

9. n 次単位行列 $\hat{I}_n$

   n 次正方行列 $\hat{I}_n$ が次の形を持つとき n 次単位行列とよぶ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{77}$$

   そして n 次正方行列 $\hat{A}$ に対して次の性質を満たす.

$$\hat{A}\hat{I}_n = \hat{I}_n\hat{A} = \hat{A} \tag{78}$$

- 例

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{に対して}$$

$$\hat{A}\hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 0 & 1\times 0 + 2\times 1 \\ 3\times 1 + 4\times 0 & 3\times 0 + 4\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A}$$

$$\hat{I}_2\hat{A} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 0\times 3 & 1\times 2 + 0\times 4 \\ 0\times 1 + 1\times 3 & 0\times 2 + 2\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{79}$$

10. 行列の冪 $\hat{A}^k$

    ある n 次正方行列 $\hat{A}$ の k 回の積

$$\hat{A}^k = \overbrace{\hat{A}\cdot\hat{A}\cdot\hat{A}\cdots\hat{A}}^{k} \tag{80}$$

- 例

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{に対して}$$

$$\begin{aligned} \hat{A}^3 &= \left(\hat{I}_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^3 \\ &= \hat{I}_2^3 + 3\hat{I}_2^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3I_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^3 \\ &= \hat{I}_2 + 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{81}$$

11. 転置行列
    $m \times n$ 行列 $\hat{A} = (a_{ij})$ に対して,

$$^t\hat{A} = (a_{ij}) \tag{82}$$

- 例

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{4} & 5 & \boxed{6} \\ \boxed{7} & \boxed{8} & 9 \\ \boxed{10} & \boxed{11} & \boxed{12} \end{pmatrix}, \text{に対して}$$

$$^t\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{4} & \boxed{7} & \boxed{10} \\ \boxed{2} & 5 & \boxed{8} & \boxed{11} \\ \boxed{3} & \boxed{6} & 9 & \boxed{12} \end{pmatrix} \tag{83}$$

12. 対称行列 $\hat{T}$
    n 次正方行列 $\hat{T}$ が以下を満たす.

$$^t\hat{T} = \hat{T} \tag{84}$$

- 例

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{2} & 4 & \boxed{5} \\ \boxed{3} & \boxed{5} & 6 \end{pmatrix} \tag{85}$$

13. 交代行列 $\hat{A}$
    n 次正方行列 $\hat{A}$ が以下を満たす.

$$^t\hat{A} = -\hat{A} \tag{86}$$

- 例

$$
\begin{aligned}
\hat{A} &= \begin{pmatrix} 0 & -\boxed{1} & -\boxed{2} \\ \boxed{1} & 0 & -\boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{3} & 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow {}^t\,\hat{A} &= \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & \boxed{2} \\ -\boxed{1} & 0 & \boxed{3} \\ -\boxed{2} & \boxed{3} & 0 \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} 0 & -\boxed{1} & -\boxed{2} \\ \boxed{1} & 0 & -\boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{3} & 0 \end{pmatrix} = -\hat{A}
\end{aligned}
\tag{87}
$$