演習 6　演習: 行列の演算と行列式 3

1. 次の行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の和と積を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 次の行列 $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$,

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ただし, $i = \sqrt{-1}$ とする. これらに対して, 以下の演算を計算せよ.

(a)

$$\hat{\sigma}_y^2$$

(b)

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z$$

(c)

$$(\hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_y)(\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y).$$

※これらの行列は Pauli 行列と呼ばれ, 量子力学での 1/2 スピン演算子を表す.

3. 次を満たす行列 $\hat{P}$

$$\hat{P}\sigma_z = \sigma_y$$

※ $\hat{P}$ は三つの基本変形の積, もしくは一つの基本変形とスカラー倍で書ける.

4. 以下の行列の逆行列を答えよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. 次の行列 $\hat{A}$, $\hat{B}$ と $\hat{C}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

に対し, 次の式を計算せよ

$$\hat{B}^{-1}\left[{}^t\left(\hat{A}^{-1}\hat{C}^t\hat{B}\right)\right]{}^t\hat{A}$$

.

6. 次の行列の行列式の値を答えよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

7. 次の行列 $\hat{A}$, $\hat{B}$ と $\hat{C}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

に対し, 次の行列式を計算せよ

$$\left|\hat{B}^{-1}\right|\left|{}^t\left(\hat{A}^{-1}\hat{C}^{-2}\hat{B}\right)\right|\left|\hat{A}\right|$$

.

8. 以下の回転行列

$$\hat{R}(\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

と列ベクトル

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考えたとき次の列ベクトル $\boldsymbol{a}$ を $a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y$ の形に表せ.

(a) $\hat{R}(\pi)\hat{R}(-\pi/2)\boldsymbol{e}_x$

(b) $\hat{R}(\pi/2)\hat{R}(\pi/2)\left(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y\right)$

(c) またこのとき次の θ を計算せよ.

$$\hat{R}(\theta) = \hat{R}(\pi/2)\hat{R}(\pi/2)$$

※ (c) ヒント 加法定理 $\cos(\psi+\phi) = \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\sin\phi$ と $\sin(\psi+\phi) = \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\phi$ を用いる.