

## 演習 2.1 回答

1.

$$(\hat{A} \ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 15 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ 11 & 7 & 0 & -30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\hat{C} \ \mathbf{d}) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -6 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って,

$$r(\hat{A}) = 3, \quad r((\hat{A}, \mathbf{b})) = 3$$

である。また、 $r(\hat{A}) = 3$  であり、かつ、未知数の数 (もしくは  $\hat{A}$  の列の数) が  $n=3$  である。従って、 $r(\hat{A}) = n$  であり定理 2.4 から解は一意に存在する。その解は  $\mathbf{d}$  より、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2.

$$(\hat{A} \ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\hat{C} \ \mathbf{d}) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

従って,

$$r(\hat{A}) = 2, \quad r((\hat{A}, \mathbf{b})) = 3$$

である。また、 $r(\hat{A}) = 2$  であり、かつ、未知数の数 (もしくは  $\hat{A}$  の列の数) が  $n=3$  である。従って、 $r(\hat{A}) < n$  であり定理 2.4 から解は存在しない。

3.

$$(\hat{A} \ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\hat{C} \ \mathbf{d}) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って,

$$r(\hat{A}) = 3, \quad r((\hat{A}, \mathbf{b})) = 3$$

である. また,  $r(\hat{A}) = 3$  であり, かつ, 未知数の数 (もしくは  $\hat{A}$  の列の数) が  $n=3$  である. 従って,  $r(\hat{A}) = n$  であり, かつ,  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$  であり定理 2.5 から解は一意に存在する. ピボットでない未知数を  $z = c$  とすると解は,

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c \\ -\frac{2}{3}c \\ \frac{1}{3}c \\ c \end{pmatrix}$$

となる.