

# 1 イジング模型と平均場近似

## 1.1 イジング模型

問題をはっきりさせるために、ここでは強磁性体の最も簡単なモデルであるイジング模型を考えることにしよう。一軸性の異方性を持つ強磁性体を想定する。異方性の軸を上下方向に設定し、 $D$ 次元立方格子の格子点には上または下を向くことができるミクロな磁石である「スピン」が並んでいるものとする。これを数式で表すために、格子点上に「スピン変数」 $S_i$  ( $i$ は格子点の番号)が置かれているとし、スピンの向きを決めると微視的状態がひとつ決まる。微視的状態を指定するだけならハミルトニアンは不要であることに注意。スピンの総数を  $N$  とすると、この系の微視的状態の総数は  $2^N$  個である

ここで、最近接スピン同士が同じ値をとるとエネルギーが  $J$  下がり、違う値なら  $J$  上がるというハミルトニアンを設定しよう。このハミルトニアンの基底状態としては全てのスピンの向きが  $+1$  か全てのスピンの向きが  $-1$  のふたつがあり、二重縮退している。磁化  $M$  をスピン変数の平均値とすると基底状態は  $M = \pm 1$  であり、これは強磁性の状態に相当する。ハミルトニアンの具体的な形は以下のように与えられる

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i, j \rangle} S_i S_j \quad (1)$$

ここで、相互作用定数  $J > 0$ 、また  $\langle i, j \rangle$  はすべての最近接スピン対について和をとることを意味するものとする。 $S_i = S_j$  なら  $S_i S_j = 1$ 、 $S_i = -S_j$  なら  $S_i S_j = -1$  なので、たしかにこれが欲しいハミルトニアンである。

さらに外部磁場の効果を取り入れよう。外部磁場も上または下向きに限られるとして、ひとつスピンの向きが外部磁場と同じ向きならエネルギーが  $H$  下がり、逆向きなら  $H$  上がるとすれば、ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i, j \rangle} S_i S_j - H \sum_i S_i \quad (2)$$

で与えられる。ただし、磁場の大きさ  $H$  は可変のパラメーターである。 $H \neq 0$  なら、基底状態の縮退が破れ、全スピンが磁場と同じ方向を向いた状態が唯一の基底状態となる。

## 1.2 高温展開

当面、 $H = 0$  を考えよう。イジング模型の基底状態は全てのスピンの向きが同じ方向を向いた状態だった。温度  $T = 0$  では強磁性状態であり、縮退した基底状態のどちらか一方が実現するはずである。どちらが実現するかは、 $T = 0$  に到達するまでの履歴によるに違いない。いっぽう、高温極限  $T = \infty$  では熱揺らぎが相互作用に勝つので、隣り合うスピン同士が揃う傾向はなく、全てのスピンの向きがばらばらの方向を向くはずである。このとき  $M = 0$  となる。これは常磁性状態に相当する。そこで、常磁性状態から温度を下げていったとき、 $M = 0$  から  $M = \pm 1$  の強磁性状態まで、どのように変化していくかを知るのがこの節の主眼となる。

有限温度での分配関数は

$$Z = \sum_{\{S\}} \exp \left( K \sum_{\langle i, j \rangle} S_i S_j \right) \quad (3)$$

ただし、 $K = J/T$  である。 $J$  と  $T$  は必ずこの組み合わせでしか現れない。また、和はすべての微視的状態にわたって足すことを意味している。ハミルトニアンは二体の相互作用の集まりなので、簡単に計算できるとは限らない。実は、系が一次元なら転送行列の方法などを使って分配関数を簡単かつ厳密に計算できる。一次元イジング模型については、あとで繰り込み群の例として計算するので、今は計算しないでおこう。二次元系でも厳密に計算できることが知られているが、かなりテクニカルかつ煩雑なので、ここでは扱わない。一方、三次元以上の系では厳密な計算方法は知られておらず、近似的な計算を工夫しなくてはならない。<sup>1</sup>

そこでまず簡単な近似計算として、高温展開を紹介しよう。その名のとおり、充分高温では  $K \ll 1$  であることを使って、指数関数をテーラー展開して、低次項だけを残すものである。例題として二次項まで残してみよう

$$\exp\left(K \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j\right) \simeq 1 + K \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j + \frac{K^2}{2} \left(\sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j\right)^2 \quad (4)$$

この各項をすべての微視的状態について足し上げればよい。第一項は

$$\sum_{\{S\}} 1 = 2^N \quad (5)$$

第二項は

$$\sum_{\{S\}} K \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j = 0 \quad (6)$$

ここで、全微視的状態についての和なので、すべての  $S_i$  は  $\pm 1$  が同数ずつ現れ、 $\sum_{\{S\}} S_i = 0$  であることを使った。第三項も同様だが、 $S_i^2 S_j^2 = 1$  なので 0 ではない組み合わせが出現し

$$\sum_{\{S\}} \frac{K^2}{2} \left(\sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j\right)^2 = \sum_{\{S\}} \frac{K^2}{2} \left(\sum_{\langle i,j \rangle} 1\right) = \frac{K^2}{2} DN 2^N \quad (7)$$

ただし、 $DN$  は最近接スピン対の総数である。したがって、分配関数は

$$Z \simeq 2^N \left(1 + \frac{K^2}{2} DN\right) \quad (8)$$

同様にして、磁化を計算することもできる。磁化は

$$M = \frac{1}{N} \frac{\sum_{\{S\}} (\sum_i S_i) \exp\left(K \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j\right)}{Z} = \frac{\sum_{\{S\}} S_i \exp\left(K \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j\right)}{Z} \quad (9)$$

ここで系の並進対称性を使った。この分子も高温展開すればいいのだが、どの項も必ず  $S$  の奇数個の積になるので、上と同様に考えると、すべての次数の項が自明に 0 である。すなわち、高温展開で計算する限り、磁化は常に 0 となることがわかる。高温展開では常磁性状態しか記述できないわけである。高温からの摂動展開ではどれほど展開の次数を上げようと、決して強磁性状態にたどり着くことはできない。これは摂動論の重要な性質である。もちろん、がんばれば強磁性になる直前までは到達できる。実際、高温展開は 22 次まで計算されており、常磁性状態に関する限りは非常に精密な結果が得られる

<sup>1</sup>三次元イジング模型の分配関数を厳密に計算する方法はあるのではないかと考える人は昔からたくさんいて、もしかするとできるのかもしれないのだが、今のところ成功例はない。これに人生を賭けることはあまり勧めない

## 1.3 平均場近似

### 1.3.1 Gibbs-Bogoliubov-Feynman の不等式と変分原理

そこで、まったく違う近似方法を考えることにしよう。高温展開は摂動展開の一種であるが、次は変分原理に基づいた近似を考える。ここで使うのは Gibbs-Bogoliubov-Feynman の不等式である。まず、それを導出する。任意の確率変数  $X$  とそれに関する平均  $\langle \cdot \rangle$  を定義する。

最初に示したいのは不等式

$$\langle e^X \rangle \geq e^{\langle X \rangle} \quad (10)$$

である。ここで

$$g(\lambda) = \langle e^{\lambda(X - \langle X \rangle)} \rangle \quad (11)$$

を考えよう。  $g(0) = 1$  かつ  $\left. \frac{dg}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = 0$  であり、さらに

$$\frac{d^2g}{d\lambda^2} = \langle (X - \langle X \rangle)^2 e^{\lambda(X - \langle X \rangle)} \rangle \geq 0 \quad (12)$$

であることから、  $\lambda > 0$  に対して常に  $g(\lambda) \geq 1$ 。従って

$$g(1) = \langle e^{X - \langle X \rangle} \rangle \geq 1 \quad (13)$$

となり、確かに上の不等式が示された。導出から明らかなように、この不等式は確率変数が多変数であっても成立する。

次にハミルトニアン  $\mathcal{H}$  が

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \quad (14)$$

とふたつの部分に分けられるとする。分配関数は

$$Z = \sum e^{-\mathcal{H}/T} = \sum e^{-\mathcal{H}_0/T - \mathcal{H}_1/T} = \sum e^{-\mathcal{H}_0/T} e^{-\mathcal{H}_1/T} \quad (15)$$

ただし、和は全微視的状態についてとる。ここで、  $\mathcal{H}_0$  をハミルトニアンとみなしたときの分配関数  $Z_0$  と期待値  $\langle \cdot \rangle_0$  を導入すると

$$Z = Z_0 \langle e^{-\mathcal{H}_1/T} \rangle_0 \geq Z_0 e^{\langle -\mathcal{H}_1 \rangle_0 / T} \quad (16)$$

両辺の対数を取れば

$$\log Z \geq \log Z_0 - \frac{\langle \mathcal{H}_1 \rangle_0}{T} \quad (17)$$

自由エネルギーになおすと

$$F \leq F_0 + \langle \mathcal{H}_1 \rangle_0 \quad (18)$$

となる。ただし、  $F$  が真の自由エネルギー、  $F_0$  は  $\mathcal{H}_0$  をハミルトニアンとしたときの自由エネルギーである。この自由エネルギーに対する不等式が Gibbs-Bogoliubov-Feynman の不等式と呼ばれる。

この不等式から変分原理を構成できる。ハミルトニアンを任意のふたつの部分に分けて右辺を計算する。この値が小さければ小さいほど真の自由エネルギーに近いはずである。ハミルトニアンの分割の仕方にルールはなく、  $\mathcal{H}_0$  をハミルトニアンとみなしたときの自由エネルギーや期待値が計算しやすいように分割するのが普通である。

### 1.3.2 平均場近似

ここで、もっとも簡単なハミルトニアンを分割法を考えよう。分配関数が計算できなかったのは二体相互作用のせいだったので、 $\mathcal{H}_0$  としては二体相互作用を含まないものを採用する。

$$\mathcal{H}_0 = -\lambda \sum_i S_i \quad (19)$$

ここで、 $\lambda$  は分割のしかたを変えるパラメーターであり、符号は便宜上負としたが、正符号でももちろんできる。すると  $\mathcal{H}_1$  は残りの部分なので

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H} + \lambda \sum_i S_i \quad (20)$$

である。分割したというよりも、足して引いただけだし、難しい部分はそのまま  $\mathcal{H}_1$  に押し付けただけで、こんなのでよいのかと思われそうだが、このような分割でも変分原理は成立するのである。

外部磁場がある場合、外部磁場を含む項は二体相互作用を含まないから、 $\mathcal{H}_0$  に含めてしまうのがよい。結局

$$\mathcal{H}_0 = -(\lambda + H) \sum_i S_i \quad (21)$$

したがって

$$\mathcal{H}_1 = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j + \lambda \sum_i S_i \quad (22)$$

となる。

これを使って、不等式の右辺を計算しよう。分配関数  $Z_0$  は

$$Z_0 = \sum_{\{S\}} \exp\left(\frac{\lambda + H}{T} \sum_i S_i\right) = \prod_i \left\{ \sum_{S_i = \pm 1} \exp\left(\frac{\lambda + H}{T} S_i\right) \right\} = \left\{ 2 \cosh\left(\frac{\lambda + H}{T}\right) \right\}^N \quad (23)$$

したがって、自由エネルギーは

$$F_0 = -T \log Z_0 = -TN \log \left\{ 2 \cosh\left(\frac{\lambda + H}{T}\right) \right\} \quad (24)$$

いっぽう、第二項は

$$\langle \mathcal{H}_1 \rangle_0 = \left\langle -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j + \lambda \sum_i S_i \right\rangle_0 \quad (25)$$

であるが、ここでスピンあたりの磁化を

$$m = \left\langle \frac{1}{N} \sum_i S_i \right\rangle_0 = \langle S_i \rangle_0 \quad (26)$$

と置けば (並進対称性を使った)

$$\langle \mathcal{H}_1 \rangle_0 = -JDNm^2 + \lambda Nm \quad (27)$$

と書ける。  $m$  を実際に計算するなら

$$m = \frac{1}{Z_0} \sum_{\{S\}} S_i e^{-\mathcal{H}_0/T} = \tanh\left(\frac{\lambda + H}{T}\right) \quad (28)$$

だが、いったん  $m$  のままにしておこう。ただし、 $m$  が  $\lambda$  の関数であることは忘れないようにしておく。従って

$$F_0 + \langle \mathcal{H}_1 \rangle_0 = -TN \log \left\{ 2 \cosh \left( \frac{\lambda + H}{T} \right) \right\} - JDNm^2 + \lambda Nm \quad (29)$$

これをなるべく小さくするような分割  $\lambda$  を決めなさいというのが変分計算である。 $\lambda$  に関する極値条件から

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ -TN \log \left\{ 2 \cosh \left( \frac{\lambda + H}{T} \right) \right\} - JDNm^2 + \lambda Nm \right\} = 0 \quad (30)$$

上の  $m$  の式を使うとこれは

$$(2JDm - \lambda) \frac{\partial m}{\partial \lambda} = 0 \quad (31)$$

と求められる。ここで、 $\frac{\partial m}{\partial \lambda}$  が恒等的に 0 でないなら

$$\lambda = 2JDm \quad (32)$$

である。

これは何を意味しているだろうか。 $\lambda$  を  $\mathcal{H}_0$  に代入すれば、最適な分割はハミルトニアンを

$$\mathcal{H}_0 = -(2JDm + H) \sum_i S_i \quad (33)$$

としたことに相当している。ここで  $2D$  はひとつのスピンのまわりにある最近接スピンの総数なので、 $2Dm$  は磁化  $m$  を持つ最近接スピンの和を表す。したがって、 $2JDmS_i$  という形は、 $S_i$  が磁化  $m$  を持つ  $2D$  個のスピンの相互作用定数  $J$  で相互作用していることを表現している。この意味で、今の近似は「平均場近似」と呼ばれる。<sup>2</sup>

というわけで、今のハミルトニアンの分割法の範囲で真の自由エネルギーに最も近い自由エネルギーを  $m$  の関数として表すと

$$F \leq \tilde{F}(m) = -TN \log \left\{ 2 \cosh \left( \frac{2JDm + H}{T} \right) \right\} + JDNm^2 \quad (34)$$

が得られる。しかし、これでは  $m$  が未知のまま残っているので、問題を解いたことにはならない。右辺を  $m$  に関して最小にしたものが解である。しかし、さっきも最小化したのではなかったか？ 実は  $m$  など使わずに、初めから  $\lambda$  について  $F_0 + \langle \mathcal{H}_1 \rangle_0$  を最小化すればよかっただけなのだが、変分で求められたものが「平均場近似」であることを示すために、いささかの回り道をしたのだった。しかし、せつかく  $m$  の関数になったので、自由エネルギーを最小にする  $m$  を求めてみよう。そのためには右辺の極値条件

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left[ -TN \log \left\{ 2 \cosh \left( \frac{2JDm + H}{T} \right) \right\} + JDNm^2 \right] = 0 \quad (35)$$

これより

$$m = \tanh \left( \frac{2JDm + H}{T} \right) \quad (36)$$

が得られる。なんのことはない、 $\mathcal{H}_0$  をハミルトニアンとして  $m$  を求めた式に極値条件  $\lambda = 2JDm$  を代入しただけで、考えてみれば当たり前である。この式は左右両辺に  $m$  が含まれる。これを満たす  $m$  が自由エネルギーを最小にする  $m$  である。このように決めるべき量が左右両辺に含まれる式を「自己無撞着な方程式」と呼ぶ。

<sup>2</sup>平均場近似は周辺のスピンを平均するというナイーブな方法でも導出できるが、その場合はエネルギー（および自由エネルギー）の計算にいささが注意が必要である。今の変分による導出では、そのような注意は必要ない

### 1.3.3 転移点と磁化

自己無撞着な方程式の解は数値計算すれば求められるが、ここでは  $m$  が小さい場合の解を求めよう。高温では  $m = 0$  のはずだから、 $m$  が小さいという条件を満たすパラメーターの範囲は必ず存在する。まず、 $H = 0$  の場合を考える。 $\tanh$  をテーラー展開して、最初の二項を残すと

$$m \simeq 2KDm - \frac{1}{3}(2KDm)^3 \quad (37)$$

明らかに  $m = 0$  は常に解である。そこで、 $m \neq 0$  の解があるかどうか調べてみよう。両辺を  $m$  で割って整理すれば

$$\frac{1}{3}(2KD)^3 m^2 = 2KD - 1 \quad (38)$$

これが実数の  $m$  を解として持つのは  $2KD \geq 1$  の場合だけである。そこで

$$K_c = \frac{1}{2D} \quad (39)$$

あるいは

$$T_c = 2DJ \quad (40)$$

と置く。 $T > T_c$  では  $m = 0$  のみが自己無撞着な方程式の解なのに対し、 $T < T_c$  では他にふたつの解が現れる。それらの解は

$$m = \pm \sqrt{3 \left( \frac{T}{T_c} \right)^3 \left( \frac{T_c}{T} - 1 \right)} \quad (41)$$

である。ここで、相転移点付近のふるまいを見るために小さな無次元量

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} \ll 1 \quad (42)$$

を導入しよう。すると  $T = T_c(1 + t)$  であるから、磁化の式は

$$m = \pm \sqrt{-3(1+t)^2 t} \simeq \pm \sqrt{-3t} \quad (43)$$

と簡単に書ける。

三つの解のうち、どれが実現するかは自由エネルギーを比較してみればよい。そのために、 $m$  の関数としての自由エネルギー  $\tilde{F}(m)$  も  $m = 0$  付近で展開してみよう。

$$\tilde{F}(m) \simeq NT \left\{ -\frac{1}{2} \frac{T_c}{T} \left( \frac{T_c}{T} - 1 \right) m^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{T_c}{T} \right)^4 m^4 - \log 2 \right\} \quad (44)$$

$m = 0$  を代入すれば

$$\tilde{F} = -NT \log 2 \quad (45)$$

で、これはすべてのスピンの勝手な方向を向いたときのエントロピーだけから来ていることがわかる。いっぽう、 $m = \pm \sqrt{-3t}$  を代入して  $t$  で整理すると（このとき第一項と第二項は  $t$  に関して同じ次数となることがすぐにわかる。これが  $m^4$  の項まで残した理由である）

$$\tilde{F} = -NT \left( \frac{3}{4} t^2 + \log 2 \right) \quad (46)$$

を得る。これを見ると、 $T < T_c$  では  $m \neq 0$  の解の自由エネルギーが  $m = 0$  より低いことがわかる。従って、平衡状態として実現するのは  $m \neq 0$  のふたつの解である。磁場をかけなくても磁化

が有限値を取ることから、このような磁化は「自発磁化」と呼ばれる。 $T > T_c$  で解だった  $m = 0$  の状態はずっと自由エネルギーの極値には対応しているが、自由エネルギー最小状態から自由エネルギーの高い極大値に移っている。このように極小値が極大値に移行すると同時に新たな極小値がふたつ出現するような変化は「ピッチフォーク分岐」と呼ばれる。さて、外部磁場がないときにはこのふたつの解の自由エネルギーは同じなので、どちらか一方が実現する。 $T_c$  は  $m = 0$  の状態 (常磁性相) と  $m \neq 0$  の状態 (強磁性相) との境なので、相転移点と呼ぶ。

結局、熱平衡状態の磁化は  $T > T_c$  で  $m = 0$ 、 $T_c$  以下になると

$$m \sim \pm \sqrt{\frac{T_c - T}{T}} \quad (47)$$

と  $T_c$  からの温度差の  $1/2$  乗で値が大きくなることがわかった。

### 1.3.4 磁場への応答

弱い磁場がかけられている場合を考えよう。磁場があるときには  $T > T_c$  の平衡状態でも  $m = 0$  であるとは限らないが、 $m$  も  $H/T$  も小さいとして、磁化を  $m$  と  $H$  の最低次まで展開すると

$$m = \frac{T_c}{T} m + \frac{H}{T} \quad (48)$$

となるから

$$m = \frac{H}{T - T_c} \quad (49)$$

となり、磁化の値は磁場に比例する。これが常磁性状態である。ここで零磁場帯磁率  $\chi$  を

$$\chi = \left. \frac{\partial m}{\partial H} \right|_{H \rightarrow 0} \quad (50)$$

で定義すれば

$$\chi = \frac{1}{T - T_c} \quad (51)$$

となり、帯磁率は  $T_c$  に近づくと発散することがわかる。これが Currie-Weiss 則である。これは相転移点付近で起きる異常の代表例であり、このような異常は「臨界現象」と呼ばれる。<sup>3</sup>

$T < T_c$  ではどうなるだろうか。もともと自発磁化があるので、磁化が自発磁化の値からどのように変化するかを調べよう。相転移点に近く、自発磁化も小さいものと仮定すれば、先ほどの磁化の三次までの展開式が使えるだろう。 $m$  の三次、 $H$  については一次までの展開式を作ると

$$\left(1 - \frac{T_c}{T}\right) m + \frac{1}{3} \left(\frac{T_c}{T}\right)^3 m^3 = \frac{H}{T} \quad (52)$$

両辺を  $H$  で微分して、 $H = 0$  とすれば

$$\left[ \left(1 - \frac{T_c}{T}\right) + \left(\frac{T_c}{T}\right)^3 m^2 \right] \chi = \frac{1}{T} \quad (53)$$

ところが、 $m \sim \sqrt{T_c - T}$  なので、左辺の二項はいずれも  $\sqrt{T_c - T}$  に比例する項を与える (これが  $m$  の三次まで展開した理由である)。自発磁化を代入して整理すると

$$\chi = \frac{1}{2(T_c - T)} \quad (54)$$

<sup>3</sup>相転移点を臨界点と呼ぶこともある

となり、低温側から  $T_c$  に近づくと連れて、やはり帯磁率は発散する。

いっぽう、上で得た  $m$  の三次までの展開式で  $T = T_c$  と置けば、 $m$  に比例する項は消えて（三次まで残さなくてはならないのはこのためである）

$$\frac{1}{3}m^3 = \frac{H}{T_c} \quad (55)$$

であるから、

$$m = \left(3\frac{H}{T_c}\right)^{1/3} \quad (56)$$

となり、ちょうど相転移点での磁化は磁場の  $1/3$  乗に比例して増えることがわかる。

### 1.3.5 比熱

定積比熱（今は体積が不変と考えている）は自由エネルギー  $\tilde{F}(m)$  から（ただし、 $m$  は平衡状態での値を代入）

$$C_v = \frac{1}{N}T \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial T^2} \quad (57)$$

で求められる。 $H = 0$  を考えよう。 $T > T_c$  では  $m = 0$  が平衡値だから、 $C_v = 0$  である。 $T < T_c$  では  $m = \sqrt{-3t}$  を代入して整理すると

$$C_v = -T \frac{\partial^2}{\partial T^2} T \left( \frac{3}{4}t^2 + \log 2 \right) = \frac{3}{2}(1 + 2t) \quad (58)$$

したがって、比熱は  $T = T_c$  を境として  $\frac{3}{2}$  だけ不連続に変化する

## 2 Landau の現象論

### 2.1 対称性の自発的な破れと秩序変数

イジング模型では相転移温度  $T_c$  を境として、 $T > T_c$  で常磁性相、 $T < T_c$  で強磁性相となる。このふたつの相の違いは、マクロな磁化が存在するかどうかである。磁化は全スピンの和として定義されるが、ここでは1スピンあたりの平均磁化としよう

$$M = \frac{1}{N} \sum_i S_i \quad (59)$$

この量の熱平衡での平均値が常磁性相では0、強磁性相では有限値となる。ミクロに見ると常磁性相では各スピンの方向がバラバラの方向を向いており、強磁性相では平均として特定の方向を向くスピンの多いことから、常磁性相を「無秩序相」、強磁性相を「秩序相」と呼ぶことも多い。秩序相・無秩序相という表現は、磁性体に限らず、他の相転移でも使えるのでこちらに慣れておくのがいいだろう。

ところで、外部磁場がない場合のイジング模型のハミルトニアンは、隣り合うスピンの揃えばエネルギーが下がるというものだった。したがって、どの向きに揃うかはエネルギーに関係ない。そこで、すべてのスピンの符号を反転して

$$S_i \rightarrow -S_i \quad (60)$$



としても、ハミルトニアンは不変である。これをハミルトニアンはスピンの反転に対して「対称的」であるという。一般的にある操作に対してハミルトニアンがどのように変化するかをハミルトニアンの「対称性」と表現し、今の場合のようにハミルトニアンが変化しない場合にはハミルトニアンがその操作に対して「対称的」であるという。

さて、次にハミルトニアンではなくマクロな状態の対称性を考えてみよう。常磁性状態は磁化が0なので、全スピンを反転してもマクロには状態が変化しない。あるいは外部からではスピンを反転する操作をしたかどうかがわからない。このようにマクロな状態がある操作によって変化しないとき、先ほどと同様に、この状態がその操作に対して「対称的な状態」であるという。今の場合、常磁性状態は全スピン反転という操作についてハミルトニアンと同じ対称性を持っている。いっぽう、強磁性状態で全スピンを反転すると、全磁化も反転するので、マクロに状態が変化する。あるいは、スピンを反転する操作をしたかどうか、外部から知ることができる。このようにマクロな状態がある操作によって変化するときには、この状態はその操作について「対称性が破れた状態」であるという。このときは、ハミルトニアンが全スピン反転について対称的であるにもかかわらず、マクロな状態では対称性が破れている。ハミルトニアンが持っていた対称性をひとつ失ったという意味で、「対称性が下がった」と表現することもある。

ところで、常磁性状態から強磁性状態へ移行させるには外部磁場をかける方法と温度を変化させる方法がある。外部磁場をかけるとハミルトニアンそのものが全スピン反転について対称的ではなくなる(磁場とスピン1個の積の項が出現するから)ので、マクロな状態の対称性が破れるのは自然である。それに対し、温度を変化させる場合にはハミルトニアンの対称性は変わっていないにもかかわらず、マクロな状態の対称性が破れる。このように、ハミルトニアンの対称性を外部から明示的に変化させたわけではないのに、マクロな状態の対称性が下がった状態に変化することを「対称性の自発的な破れ」(Spontaneous Symmetry Breaking)と呼び、物理学のさまざまな分野で見られる重要な現象である。温度変化に起因する相転移現象では普通は相転移温度よりも高温が対称的な無秩序相、低温が対称性の破れた秩序相である。

そこで、以下では対称性が自発的に破れるタイプの相転移を考えることにしよう。ここで、対称性はあるかないかであって、「対称性が少しある」ということはないという点に注意する。強磁性体のマクロな磁化がどれほど小さくても、それがゼロでない限りは対称性は破れているのである。そのような対称性の有無を表現するために、「秩序変数」と呼ばれる変数を設定する。高温 ( $T > T_c$ ) を無秩序相、低温 ( $T < T_c$ ) を秩序相とし、秩序変数  $\phi$  を以下のような量と定義する<sup>4</sup>。

$$\phi = 0 \quad (T > T_c) \quad (61)$$

$$\phi \neq 0 \quad (T < T_c) \quad (62)$$

これが成り立つものであれば、原理的にはどんな量でも秩序変数にできるが、物理的に自然な量がとれるならそれに越したことはない。たとえば、強磁性体なら磁化を秩序変数とするのが自然だろう。

以下では、高温側から臨界温度  $T = T_c$  を越えて低温側にはいる際、温度とともに秩序変数の値は0から連続的に大きくなり、値に不連続点はないものとする。このような相転移は「連続相転移」と呼ばれる。<sup>5</sup> イジング的な一軸性の異方性を持つ秩序が出現する系では、 $\phi$  をスカラー量として、磁化の方向に応じて正負の値をとれるものとする。

<sup>4</sup>秩序パラメーターと呼ぶことが多いが、なぜパラメーターと呼ぶのか、よくわからない

<sup>5</sup>歴史的な事情で二次相転移と呼ばれることが多い。また、ランダウ・リフシッツの教科書では第二種の相転移と呼んでいる

## 2.2 ランダウ自由エネルギー

以下の方針で、相転移を記述する現象論的な自由エネルギー関数を設定する。外部パラメータとして温度  $T$  が与えられると、熱平衡の自由エネルギーは一意に決まり、秩序変数の熱平衡値も決まる。そこで自由エネルギーをいったん  $T$  と  $\phi$  の2変数関数  $F(T; \phi)$  とみなすことにする。 $T$  と  $\phi$  は立場が違うので、セミコロンで区切った。ただし、 $\phi$  の値は本来なら熱平衡条件で決まるものなので、平衡値以外の  $\phi$  の値を取るときの自由エネルギーは非平衡状態での値と考える。

すると、平衡状態は与えられた  $T$  のもとで自由エネルギー最小となる状態だから、平衡条件は

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = 0 \quad (63)$$

である。これが  $\phi$  を決める。つまり、この枠組みではマクロな状態が  $\phi$  という一変数で記述できるものとして、その範囲で可能なマクロ状態のうちで、自由エネルギー最小となる  $\phi$  が熱平衡として実現すると考えるわけである。

臨界温度  $T_c$  のごく近くでは、低温側でも  $\phi$  の値は0に近いはずなので、 $F$  は  $\phi$  による低次のテーラー展開で十分に記述できると仮定する。実はこの仮定は正しくないのだが、ランダウ現象論の肝はこの展開にある。マクロな熱平衡状態が対称性を破っているとしても、対称性を破る外場がかかっていない限り自由エネルギーは対称性をもつべきなので、以下を要請する。

$$F(T; \phi) = F(T; -\phi) \quad (64)$$

したがって、 $F$  は  $\phi$  の偶数次だけで展開される。相転移を記述できる最低次の展開として、 $F$  を  $\phi$  の4次まで展開する。展開係数は  $T$  のみの関数である。

$$F(T; \phi) = F_0(T) + A(T)\phi^2 + B(T)\phi^4 \quad (65)$$

$F_0$  は温度だけで決まる項である。これが  $T < T_c$  で  $\phi \neq 0$  に極小を持つためには、 $A(T)$  が  $T_c$  を境に符号を変えればよい。これを実現する最も簡単な形は  $A(T)$  が  $T - T_c$  に比例するものである。 $T_c$  付近の振る舞いを知るにはこれで充分だろう。一方、 $B(T)$  は  $A(T)$  の場合にも有限の  $\phi$  で極小になるように常に正の値をとりさえすればいいので、正の定数としてかまわない。

次に、対称性を破る外場の効果を考える。これは強磁性体では磁場にあたる。外場  $h$  と  $\phi$  の両方の符号を同時に反転するという操作に対して自由エネルギーは不変であるべきなので、もっとも簡単な形は外場を  $h\phi$  の形で自由エネルギーに足せばよい。

ここで、 $F$  は体積に比例するはずなので、以下では自由エネルギー密度  $f$  を考えよう。

$$F(T, h; \phi) = Vf(T, h; \phi) \quad (66)$$

ここまでの考察をまとめると、 $f$  は以下のように書ける

$$f(T, h; \phi) = f_0(T, h) + a(T - T_c)\phi^2 + b\phi^4 - h\phi \quad (67)$$

(ただし、 $a$  と  $b$  は正の定数)。なお、ここでは各変数の次元はほとんど気にしていない。各項がエネルギー密度の次元になるように適当に決まっていることにしよう。次元については、あとで空間相関を考えるとときに吟味する。

## 2.3 平衡状態

平衡条件より  $\phi$  を決める式は

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = 2a(T - T_c)\phi + 4b\phi^3 - h = 0 \quad (68)$$

$h = 0$  では

$$2a(T - T_c)\phi + 4b\phi^3 = 0 \quad (69)$$

高温 ( $T > T_c$ ) では  $\phi = 0$  が唯一の解となる。一方、低温 ( $T < T_c$ ) では  $\phi = 0$  に加えて

$$\phi = \pm \sqrt{-\frac{a(T - T_c)}{2b}} \quad (70)$$

も解になる。関数形から明らかにこちらが自由エネルギー極小、 $\phi = 0$  は極大に対応するので、これが  $\phi$  の平衡値である。正負のふたつの  $\phi$  が平衡値になるが、ふたつの状態が同時には実現できないので、なんらかの偶然の要素によっていずれか一方が選ばれ、対称性が自発的に破れることになる。

秩序変数は  $T = T_c$  を境に

$$\phi \sim (T_c - T)^{1/2} \quad (71)$$

と立ち上がる。

次に、秩序変数の感受率

$$\chi = \left( \frac{\partial \phi}{\partial h} \right)_{h=0} \quad (72)$$

を求める。 $h \neq 0$  での  $\phi$  の熱平衡値は

$$2a(T - T_c)\phi + 4b\phi^3 = h \quad (73)$$

で決まるので、この式に沿って  $\phi$  を  $h$  で微分すると

$$(2a(T - T_c) + 12b\phi^2)\chi = 1 \quad (74)$$

$$\chi = \frac{1}{2a(T - T_c) + 12b\phi^2} \quad (75)$$

$T > T_c$  では  $\phi = 0$  なので

$$\chi = \frac{1}{2a(T - T_c)} \quad (76)$$

$T < T_c$  では  $\phi = \pm \sqrt{-\frac{a(T - T_c)}{2b}}$  なので

$$\chi = -\frac{1}{4a(T - T_c)} \quad (77)$$

となり、感受率は高温側・低温側とも  $T_c$  に向かって

$$\chi \sim |T - T_c|^{-1} \quad (78)$$

と発散する。これは Curie-Weiss 則である。

感受率の発散は、もちろん無限小外場で  $\phi$  が発散するという意味ではない。あくまでも、 $\phi$  が外場に比例しなくなることを表しているだけである。では、 $T = T_c$  で  $\phi$  は外場にどのように依存するかというと

$$4b\phi^3 = h \quad (79)$$

なので

$$\phi \sim h^{1/3} \quad (80)$$

となる。

## 2.4 比熱

$h = 0$  での比熱を求める。そのためには自由エネルギー密度の平衡値が必要である。これは単に  $f$  に平衡の  $\phi$  を代入すればよく

$$f(T) = f_0(T) \quad (T > T_c) \quad (81)$$

$$f(T) = f_0(T) + \frac{a^2(T - T_c)^2}{4b} \quad (T < T_c) \quad (82)$$

比熱は

$$C = \frac{1}{V} \frac{dU}{dT} = \frac{d}{dT} \left( f - \frac{df}{dT} \right) = T \frac{d^2 f}{dT^2} \quad (83)$$

なので

$$C = C_0(T) \quad (T > T_c) \quad (84)$$

$$C = C_0(T) + \frac{a^2}{2b} T \quad (T < T_c) \quad (85)$$

ただし、 $C_0(T)$  は相転移と関係のない温度依存性である。これより、比熱は  $T = T_c$  で不連続となる。

以上のように、Landau の現象論ではハミルトニアンを仮定することなく平均場近似と同じ結果が再現される。

## 3 秩序変数のゆらぎ

次に考えたいのは、秩序変数がランダウ理論の平衡値から揺らぐと何が起きるかである。普通の問題なら、揺らぎは平衡値に対する小さな補正を与えるだけだが、臨界点近くでは秩序変数の揺らぎがランダウ理論の平衡状態そのものを壊してしまうという現象が起きる。これを見ていこう。

### 3.1 温度一定条件下での物理量のゆらぎ

カノニカル分布でエネルギー  $E_i$  の微視的状態が実現する確率は

$$P(E_i) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} \quad (86)$$

微小なエネルギー範囲  $[E, E + \delta E]$  が実現する確率は

$$P(E)\delta E = \frac{1}{Z} e^{-\beta E} N(E)\delta E \quad (87)$$

ただし、 $N(E)$  はエネルギー  $E$  の状態密度である。エネルギー以外の量で微視的状態を分類することもできて、たとえば、強磁性体ならそのような量として磁化  $M$  が考えられる。微小なエネルギー範囲  $[E, E + \delta E]$  かつ、微小な磁化範囲  $[M, M + \delta M]$  が実現する確率は

$$P(E, M)\delta E\delta M = \frac{1}{Z} e^{-\beta E} N(E, M)\delta E\delta M \quad (88)$$

となる。ボルツマン因子はエネルギーだけによるので、磁化による状態の分類は状態密度だけに反映していることに注意する。

ここで、エネルギーについては積分してしまえば、エネルギーによらず磁化の実現確率が求められる。

$$P(M)\delta M = \frac{1}{Z} \int dE e^{-\beta E} N(E, M)\delta M \quad (89)$$

このとき

$$Z(M)\delta M = \int dE e^{-\beta E} N(E, M)\delta M \quad (90)$$

と書けば、 $Z(M)\delta M$  はとりうる状態を  $[M, M + \delta M]$  の範囲の磁化を持つ状態だけに限ったときの分配関数になっている。これは分配関数なのだから、

$$Z(M) = e^{-\beta F(M)} \quad (91)$$

とすれば、 $F(M)$  は磁化が  $M$  のときの自由エネルギーとみなせる。これより、磁化の値が  $M$  と  $M_0$  との実現確率の比は

$$\frac{P(M)}{P(M_0)} = e^{-\beta(F(M) - F(M_0))} \quad (92)$$

と自由エネルギー差で表されることがわかる。これは一般的な結論で、磁化に限らず、エネルギー以外の物理量の実現確率の比は自由エネルギー差で表される。

これより、熱平衡状態で物理量がゆらぐ確率を求めるには、熱平衡を基準としてそこからの自由エネルギー差を考えればよいことがわかる。たとえば、磁化が熱平衡から  $\Delta M$  だけ変化するときの自由エネルギー変化を  $\Delta F(\Delta M)$  と書けば  $\Delta M$  だけゆらぐ確率密度は

$$P(\Delta M) \sim e^{-\beta \Delta F(\Delta M)} \quad (93)$$

である。このとき、ゆらぎだけに着目した分配関数は

$$Z = \int d\Delta M e^{-\beta \Delta F(\Delta M)} \quad (94)$$

で与えられる。

### 3.2 秩序変数のゆらぎ (高温側)

ランダウ自由エネルギーは平衡状態をはずれた  $\phi$  についても定義されている。そこで、これを上で導入した  $F(M)$  と同じものとみなそう。つまり、秩序変数が熱平衡値からゆらぐ確率密度を

$$P(\Delta\phi) \sim e^{-\frac{V}{T}\Delta f(\Delta\phi)} \quad (95)$$

とする。

まず、 $T > T_c$  で考えると、熱平衡状態で  $\phi = 0$  である。そこからのゆらぎを考えるのだが、指数の肩に体積に比例する量が乗っていることから、ゆらぎの確率はゆらぎが大きくなると急激に小さくなる。そこで、自由エネルギー差については  $\Delta f$  (今の場合は、0からのずれなので  $\phi$  そのもの) の二次まで考えれば充分だろう。

$$\Delta f(\phi) = a(T - T_c)\phi^2 \quad (96)$$

ここであとの便利を考えて、 $T_c$  との近さを表現する無次元量

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} \quad (97)$$

を導入しておく。

$$\frac{\Delta f(\phi)}{T} = at\phi^2 \quad (98)$$

ただし、 $T_c$  付近しか議論しないので、 $(T - T_c)/T \simeq t$  とした。

これから空間をいれることを考えて、各量の次元を決めておく。簡単のために  $\phi$  を無次元量とすると  $a$  の次元は体積の逆数だから、何か適当な小さい「特徴的な体積」を想定していることになる ( $V$  を掛けて体積に比例するので、全体積ではない小さな一定体積)。

### 3.3 ゆらぎの空間相関

このままでは、 $\phi$  は全系でひとつの値をとるだけなので、ゆらぎの空間相関を調べるために局所的な秩序変数  $\phi(\mathbf{r})$  を導入する。局所的とはいっても、秩序変数が定義されるにはある程度大きな体積を考えなくてはならない。そこで、全系を体積  $v \ll V$  の領域に分割し、各領域に  $\phi(\mathbf{r})$  を定義する。当然、 $v$  はマイクロなサイズ (典型的には原子間距離を一辺とする立方体) よりは充分大きいものとする。つまり、ここでは「空間を適当に粗視化した表現」を考えている。各領域の中心座標  $\mathbf{r}_i$  で  $\phi$  を指定すると、各領域がさまざまにゆらぐ確率密度は

$$P(\phi(\mathbf{r}_1), \phi(\mathbf{r}_2), \dots, \phi(\mathbf{r}_n)) = e^{-vat \sum_i \phi(\mathbf{r}_i)^2} \quad (99)$$

しかし、これでは各領域が独立にゆらぐだけである。実際には近い領域間では  $\phi$  があまり変化しない長波長のゆらぎだけが効くだろう (領域に分けて、各領域内では  $\phi$  が一定とみなしたのでから、そのように仮定している)。そこで、 $\phi$  がゆるやかにしか変化しないという効果を天下一りに導入する。もっとも簡単には隣接領域の  $\phi$  との差の二乗に比例して自由エネルギーが大きくなるようにしておけばよい。そこで

$$\sum_{j:\text{neighbor}} c(\phi(\mathbf{r}_i) - \phi(\mathbf{r}_j))^2 \simeq \frac{c}{2} v^{2/d} (\nabla\phi(\mathbf{r}_i))^2 \quad (100)$$

の形の項を自由エネルギーに付け加える

$$\frac{F}{T} = \sum_i \left[ vat\phi(\mathbf{r}_i)^2 + v^{2/d} \frac{c}{2} (\nabla\phi(\mathbf{r}_i))^2 \right] \quad (101)$$

したがって、ゆらぎの分配関数は

$$Z = \int \Pi_i d\phi(\mathbf{r}_i) e^{-\sum_i [vat\phi(\mathbf{r}_i)^2 + v^{2/d} \frac{c}{2} (\nabla\phi(\mathbf{r}_i))^2]} \quad (102)$$

で与えられる。ここで、 $\phi$  は小さいと考えているので各積分は小さな値の範囲で行われるべきだが、 $\phi$  の値とともに被積分関数は急激に小さくなるので、積分範囲を全実数に広げても影響しない。

ここで連続極限をとる。

$$\frac{F}{T} = \int [at\phi(\mathbf{r})^2 + c(\nabla\phi(\mathbf{r}))^2] d\mathbf{r} \quad (103)$$

したがって、ゆらぎの分配関数は

$$Z = \int D\phi(\mathbf{r}) e^{-\int [at\phi(\mathbf{r})^2 + c(\nabla\phi(\mathbf{r}))^2] d\mathbf{r}} \quad (104)$$

ただし、 $\int D\phi(\mathbf{r})$  は汎関数積分を表し、無限自由度の積分だが、具体的に積分する必要があるときには連続極限をとる前の式と同じと解釈することにする。

### 3.4 長さのスケール

この問題には本来、系の空間構造に関係する長さのスケールがふたつある。マクロなシステムサイズとミクロな原子間距離である。このうち、システムサイズについては、あとで熱力学極限を取って無限大に飛ばす。ミクロな原子間距離は粗視化によって、形式的には見えなくなっている。実際には粗視化と連続極限を取る操作に際して、「このくらいの長さより細かい構造は見ない」と暗黙のうちに決めた長さがあるはずで、それは原子間距離よりも十分に大きいと想定している。この「粗視化スケール」には任意性があるが、ここではきちんと決めたわけではない。いずれにしても、あらわには見えていないが、短い長さのスケールがひとつ暗黙のうちに隠れていることは頭にいれておくべきである。あとで繰り込み群を議論する際に、このスケールが重要となる。

もうひとつ、系の空間構造ではなく問題の物理的性質と関連するスケールがある。 $at\phi(\mathbf{r})^2$  と  $c(\nabla\phi(\mathbf{r}))^2$  が同じ次元であることから、係数の組み合わせによって作れる唯一の長さとして

$$\xi = \sqrt{\frac{c}{at}} \quad (105)$$

が得られる。これは後で相関距離であることがわかる。この長さが  $t \rightarrow 0$  で発散することに注意する。系の構造に関係するマクロのスケールは消えており、ミクロな側には暗黙の粗視化スケールが残っているが、粗視化スケールはいわば「長さの単位」なので、実質的には相関距離がこの問題に現れる唯一の長さのスケールである。

### 3.5 フーリエ変換

自由エネルギーは  $\phi$  の二次形式なのでガウス積分で計算できるはずだが、 $\nabla$  があって、そのままではできない。この場合の常套手段はフーリエ変換である。

全系の体積を  $V$  とし、簡単のために周期境界条件を仮定する (固定端でもできる)。秩序変数のフーリエ変換を

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \phi_{\mathbf{k}} \quad (106)$$

と定義する。ただし、 $\phi$  は実数なので、 $\phi_{\mathbf{k}} = \phi_{-\mathbf{k}}^*$  が成り立つ。

これを使って

$$\int \phi(\mathbf{r})^2 d\mathbf{r} = \int d\mathbf{r} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{i\mathbf{r}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} \phi_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}'} = V \sum_{\mathbf{k}} |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \quad (107)$$

ただし

$$\int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{r}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} = V \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} \quad (108)$$

を使った。

同様に

$$\int (\nabla \phi(\mathbf{r}))^2 d\mathbf{r} = - \int d\mathbf{r} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \mathbf{k}\mathbf{k}' e^{i\mathbf{r}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} \phi_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}'} = V \sum_{\mathbf{k}} k^2 |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \quad (109)$$

これより

$$\frac{F}{T} = V \sum_{\mathbf{k}} (at + ck^2) |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \quad (110)$$

が得られる。一方、汎関数積分は空間の各点での積分を各波数での積分に変えればよい。 $\phi_{\mathbf{k}}$  は複素数なので、複素共役についての積分も必要で

$$D\phi(\mathbf{r}) = \prod_{\mathbf{k}} d\phi_{\mathbf{k}} d\phi_{\mathbf{k}}^* = \prod_{\mathbf{k}} d\phi'_{\mathbf{k}} d\phi''_{\mathbf{k}} \quad (111)$$

となる。ただし、実部と虚部を

$$\phi_{\mathbf{k}} = \phi'_{\mathbf{k}} + i\phi''_{\mathbf{k}} \quad (112)$$

と書いた。本来は積分する自由度の数がフーリエ変換前後で一致するように波数の範囲を決めるべきだが、粗視化のサイズに任意性があり、汎関数積分の自由度もある程度任意なので、ここではあまり考えないことにする。とりあえず、粗視化の特徴的サイズの逆数程度の波数が波数の上限 (カットオフ) になっているはずということだけ、頭にいれておく。

まとめるとゆらぎの分配関数は

$$Z = \int \prod_{\mathbf{k}} d\phi'_{\mathbf{k}} d\phi''_{\mathbf{k}} e^{-V \sum_{\mathbf{k}} (at + ck^2) |\phi_{\mathbf{k}}|^2} \quad (113)$$

となる。各積分は全実数範囲で行ってよいから、これは単に独立なガウス積分の積になるので、計算できて

$$Z = \prod_{\mathbf{k}} \int d\phi'_{\mathbf{k}} e^{-V(at + ck^2)\phi_{\mathbf{k}}'^2} \int d\phi''_{\mathbf{k}} e^{-V(at + ck^2)\phi_{\mathbf{k}}''^2} = \prod_{\mathbf{k}} \frac{\pi}{V(at + ck^2)} \quad (114)$$

となる。ここで、ガウス分布の性質から、各モードのゆらぎの大きさは

$$\sqrt{\frac{1}{V(at + ck^2)}} \quad (115)$$

程度であることがわかるから、波数の小さいモードのゆらぎは  $t \rightarrow 0$  で発散的に増大すると予想される。小さいと想定したはずのゆらぎが発散的に振舞うのは危険な兆候である。



### 3.6 二点相関関数

秩序変数の空間ゆらぎを知りたいので、2点相関関数

$$G(\mathbf{r}) = \langle \phi(0)\phi(\mathbf{r}) \rangle \quad (116)$$

を計算する。

すると

$$G(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{i\mathbf{r}\mathbf{k}} \langle \phi_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}'} \rangle \quad (117)$$

ここで

$$\phi_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}'} = \phi'_{\mathbf{k}} \phi'_{\mathbf{k}'} - \phi''_{\mathbf{k}} \phi''_{\mathbf{k}'} + i(\phi'_{\mathbf{k}} \phi''_{\mathbf{k}'} + \phi''_{\mathbf{k}} \phi'_{\mathbf{k}'}) \quad (118)$$

である。ガウス分布についてこの期待値を取るの、残るのは同じ  $\phi$  の二乗になるものだけである。可能性があるのは  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$  と  $\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$  だが、前者は  $\phi_{\mathbf{k}}'^2 - \phi_{\mathbf{k}}''^2$  なので期待値が0となる(ふたつの積分が逆符号で同じ値)。後者は  $\phi_{\mathbf{k}}'^2 + \phi_{\mathbf{k}}''^2$  となるので、同じ積分の2倍になる ( $\phi''_{-\mathbf{k}} = -\phi''_{\mathbf{k}}$ )。値が残るのはこれだけである。

したがって

$$G(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{r}\mathbf{k}} \langle |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle \quad (119)$$

これより、結局  $\langle |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle$  を計算すればよい。

$$\langle |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = \frac{1}{Z} \int \Pi_{\mathbf{k}} d\phi'_{\mathbf{k}} d\phi''_{\mathbf{k}} (\phi_{\mathbf{k}}'^2 + \phi_{\mathbf{k}}''^2) e^{-V \sum_{\mathbf{k}} (at + ck^2) |\phi_{\mathbf{k}}|^2} = \frac{1}{V(at + ck^2)} \quad (120)$$

これを見ると、 $t > 0$  では  $\langle |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle$  が抑えられているが、 $t = 0$  では  $\sim 1/k^2$  となり、波数0のモードの振幅が発散することがわかる。長波長モードの発散は一般に赤外発散と呼ばれる。

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{r}\mathbf{k}}}{at + ck^2} \simeq \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{e^{i\mathbf{r}\mathbf{k}}}{at + ck^2} d\mathbf{k} \quad (121)$$

最後に波数についての和から積分に移行したのは、 $V \rightarrow \infty$  としたことにあたり、熱力学極限である。積分の上限を  $\infty$  に飛ばすと、 $d = 3$  ではこの積分は比較的簡単に実行できる。

$$\frac{1}{c(2\pi)^2} \int \frac{k^2 e^{i\mathbf{r}\mathbf{k} \cos \theta}}{(1/\xi)^2 + k^2} \sin \theta d\theta dk = \frac{1}{ic(2\pi)^2 r} \int_0^{\infty} \frac{k (e^{ikr} - e^{-ikr})}{(1/\xi)^2 + k^2} dk = \frac{1}{ic(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ke^{ikr}}{(1/\xi)^2 + k^2} dk \quad (122)$$

最後の積分は複素平面の上半面を回る経路を取って、上側の極の留数を拾えばよい。結局

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi c} \frac{e^{-\frac{r}{\xi}}}{r} \quad (123)$$

ただし

$$\xi = \sqrt{\frac{c}{at}} \quad (124)$$

は相関が消える距離の目安を与えるので相関距離と呼ばれる。注目すべきは、相関距離が  $T_c$  に向かって発散することで、その発散の仕方は

$$\xi \sim (T - T_c)^{-1/2} \quad (125)$$

となる。これは、 $T_c$  で波数 0 のモードの振幅が発散することに対応し、虚軸上正負の極が原点に近づいて最終的に合体することによる。もちろん、相関関数が発散するのはあくまでも相関が指数で落ちなくなることを意味するのであって、相関が落ちないという意味ではない。実際、 $d = 3$  で  $t = 0$  なら、相関関数は  $1/r$  に比例してゆっくりと落ちることがわかる

### 3.7 変分

ここで、少し違う議論をしてみよう。熱平衡状態で実現するのは確率最大の状態だから、分配関数の中で指数関数の肩が最大となる  $\phi$  を求めればよい。最大化したいのは

$$- \int \left[ at\phi(\mathbf{r})^2 + c(\nabla\phi(\mathbf{r}))^2 \right] d\mathbf{r} \quad (126)$$

である。これは積分なので、最大化はこの変分（あるいは汎関数微分）を 0 にすることにほかならない。オイラー・ラグランジュ方程式を作って整理すると

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{\xi^2}\phi = 0 \quad (127)$$

これは、 $d$  次元のヘルムホルツ方程式である。つまり、熱平衡での  $\phi$  はこのヘルムホルツ方程式の解として得られる。もちろん、完全な熱平衡では  $\phi = 0$  が解である

これに、場所によって値の異なる微小な外場をかける。

$$- \int \left[ at\phi(\mathbf{r})^2 + c(\nabla\phi(\mathbf{r}))^2 - h(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{r} \quad (128)$$

これを最大化すれば

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{\xi^2}\phi = h(\mathbf{r}) \quad (129)$$

と非同次のヘルムホルツ方程式が得られる。この解を  $\phi^*(\mathbf{r})$  とすると、これは  $h(\mathbf{r})$  の関数である。これが平衡での秩序パラメーターの期待値となる

$$\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle = \phi^*(\mathbf{r}) \quad (130)$$

これはまた期待値の定義から

$$\langle \phi(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\partial}{\partial h(\mathbf{r})} \log \int D\phi e^{-F} \quad (131)$$

ここで、 $h(\mathbf{r}')$  を変化させたとき、別の場所での秩序変数の平衡値  $\phi^*(\mathbf{r})$  がどのように応答するかを考える。非同次ヘルムホルツ方程式を  $h(\mathbf{r}')$  で微分すると

$$2 \left( \nabla^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) \frac{\partial \phi^*(\mathbf{r})}{\partial h(\mathbf{r}')} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (132)$$

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) \frac{\partial \phi^*(\mathbf{r})}{\partial h(\mathbf{r}')} = \frac{1}{2c} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (133)$$

いっぽう

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \phi(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}') \rangle = \frac{\partial^2}{\partial h(\mathbf{r})\partial h(\mathbf{r}')} \log Z = \frac{\partial \phi^*(\mathbf{r})}{\partial h(\mathbf{r}')} \quad (134)$$

並進対称性から

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle \phi(0)\phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rangle \quad (135)$$

したがって、整理すると

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\xi^2}\right)G(\mathbf{r}) = \frac{1}{2c}\delta(\mathbf{r}) \quad (136)$$

が得られる。つまり、ゆらぎの2点相関関数はヘルムホルツ方程式のグリーン関数になっている。上で求めた2点相関関数が実際にこの方程式の解になっていることは、フーリエ変換で確認できる。

$$\left(k^2 + \frac{1}{\xi^2}\right)G_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2cV} \quad (137)$$

$$G_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2cV} \frac{1}{k^2 + \frac{1}{\xi^2}} \quad (138)$$

この結果は空間次元に依存しない。これより、 $\xi$  はたしかに次元によらず相関の減衰を決める長さであることが読み取れる。つまり、 $\xi$  は相関距離である

### 3.8 秩序変数のゆらぎ (低温側)

$T < T_c$  では秩序変数が0でない値を取るなので、そこからのゆらぎを考えなくてはならない。そこで、ランダウ自由エネルギー密度を平衡値  $\phi_{eq} = \pm\sqrt{-\frac{at}{2b}T_c}$  のまわりで展開し、ゆらぎは小さいとして2次まで残すと、

$$f(t; \phi_{eq} + \Delta\phi) = at\phi_{eq}^2 + b\phi_{eq}^4 + (2at\phi_{eq} + 4b\phi_{eq}^3)\Delta\phi + (2at + 6\phi_{eq}^2)\Delta\phi^2 = f(t; \phi_{eq}) + 2a|t|\Delta\phi^2 \quad (139)$$

となる。ゆらぎを計算するには熱平衡状態との自由エネルギー密度差があればいいから、ゆらぎの空間相関を  $c(\nabla(\Delta\phi))^2$  として導入すれば、ゆらぎの分配関数は

$$Z = \int D\Delta\phi(\mathbf{r}) e^{-\int [2a|t|\Delta\phi(\mathbf{r})^2 + c(\nabla\Delta\phi(\mathbf{r}))^2] d\mathbf{r}} \quad (140)$$

となる。したがって2次項の係数が二倍違う以外は高温の場合と変わらない。空間微分の係数が高温側と一致する必要はないように思えるかもしれないが、 $t \rightarrow 0$  の極限が低温側と高温側で一致するためには同じ値にしておかなくてはならない。

この場合も

$$\xi = \sqrt{\frac{c}{2a|t|}} \quad (141)$$

が唯一の長さのスケールであり、これが相関距離になる。

これより、ゆらぎの相関関数は

$$G(\mathbf{r}) = \langle \Delta\phi(0)\Delta\phi(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{4\pi c} \frac{e^{-\frac{r}{\xi}}}{r} \quad (142)$$

ゆらぎの相関距離はやはり  $T_c$  に向かって発散し、その発散の仕方は

$$\xi \sim (T - T_c)^{-1/2} \quad (143)$$

となる。

### 3.9 Sum rule

一般に、対称性を破る外場を含むランダウ自由エネルギーと含まないランダウ自由エネルギーの関係は

$$f(t, h; \phi) = f(t; \phi) - h\phi \quad (144)$$

である。ここで、平衡条件から、外場のもとで  $\phi$  を決める式は

$$\frac{\partial f(t, h; \phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (145)$$

より

$$\frac{\partial f(t; \phi)}{\partial \phi} = h \quad (146)$$

となる。平衡条件まで含めると、要するにこれはルジャンドル変換で独立変数を  $\phi$  から  $h$  に変更したことに相当している。

この平衡状態に沿って、両辺を  $h$  で微分すると

$$\left. \frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial f(t; \phi)}{\partial \phi} \right|_{h=0} = \frac{\partial^2 f(t; \phi)}{\partial \phi^2} \left. \frac{\partial \phi}{\partial h} \right|_{h=0} = \frac{\partial^2 f(t; \phi)}{\partial \phi^2} \chi = 1 \quad (147)$$

ただし、平衡状態に沿っているので、 $\phi$  は  $h$  の関数であることに注意。したがって

$$\frac{1}{\chi} = \frac{\partial^2 f(t; \phi)}{\partial \phi^2} \quad (148)$$

が成り立つ。右辺は  $h = 0$  の条件下だから、熱平衡とは限らないランダウ自由エネルギー密度の  $\phi$  微分である。したがって、ランダウ自由エネルギー密度を平衡値からのずれ  $\Delta\phi$  で展開したものは

$$f(t; \phi) = f_0(t) + \frac{1}{2\chi} \Delta\phi^2 + \dots \quad (149)$$

と書ける。実際、これは高温側で四次まで展開したランダウ自由エネルギー密度から

$$\chi = \frac{1}{2at} \quad (150)$$

と求められたことと一致する。

低温では平衡値  $\phi^* = \pm\sqrt{-\frac{at}{2b}}$  からの展開なので

$$f(t; \phi) = f_0(t) + \frac{1}{2\chi} (\phi - \phi^*)^2 + \dots \quad (151)$$

いっぽう、四次まで展開したランダウ自由エネルギー密度は

$$f(t; \phi) = at\phi^2 + b\phi^4 = -\frac{at}{4b} - 2at(\phi - \phi^*)^2 + \dots \quad (152)$$

とまとめられるから、比較すると

$$\chi = \frac{1}{4at} \quad (153)$$

となり、やはり以前の結果と一致する。

したがって、空間的に一様なゆらぎのみを考えて、その2次までの分配関数を書くと、

$$Z \sim \int d\Delta\phi e^{-\frac{\Delta\phi^2}{2\chi}} \quad (154)$$

となり、ガウス分布の性質から分散と感受率の関係が

$$\langle \Delta\phi^2 \rangle = \chi \quad (155)$$

と得られる。この関係はランダウ自由エネルギー密度の具体的な形を使わずに導出された一般的なものであることに注意する。

いっぽう、ゆらぎの相関関数を全空間で積分すると

$$\int d\mathbf{r} G(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r} \langle \Delta\phi(0)\Delta\phi(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \langle |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{r}\mathbf{k}} = V \langle |\phi_0|^2 \rangle \quad (156)$$

$$= \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \langle \Delta\phi(\mathbf{r})\Delta\phi(\mathbf{r}') \rangle \quad (157)$$

$$= V \left\langle \left( \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} \Delta\phi(\mathbf{r}) \right) \left( \frac{1}{V} \int d\mathbf{r}' \Delta\phi(\mathbf{r}') \right) \right\rangle \quad (158)$$

最後の式は  $\Delta\phi(\mathbf{r})$  の空間平均の期待値だから  $\langle \Delta\phi^2 \rangle$ 。したがって

$$\frac{1}{V} \int d\mathbf{r} G(\mathbf{r}) = \chi \quad (159)$$

つまり、二点相関関数の空間平均が感受率である。

### 3.10 ゆらぎによるランダウ理論の破綻

空間的なゆらぎの相関が比熱に与える影響を求めよう。以下では、 $t > 0$  を考える。ゆらぎの分配関数から、比熱のうちでゆらぎによる分は

$$C = \frac{1}{V} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -\frac{1}{V} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \log Z = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{(t + ck^2/a)^2} \quad (160)$$

と得られるはずである。ここで、システムサイズを無限大に飛ばすと、和が積分になり

$$C = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(t + ck^2/a)^2} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \frac{S_d}{(2\pi)^d} \int \frac{k^{d-1} dk}{(k^2 + 1/\xi^2)^2}$$

ただし、 $S_d$  は半径 1 の  $d$  次元球の体積である。

この積分は一見紫外発散しそうだが、実際には紫外側には粗視化スケールに対応するカットオフがあるので発散しない。一方、赤外側は分母の  $1/\xi^2$  で発散を抑えているから、相関長が発散する  $t \rightarrow 0$  で異常が起きうる。そこで、 $t = 0$  としてみると

$$C = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \frac{S_d}{(2\pi)^d} \int_0^\Lambda k^{d-5} dk$$

ただし、波数にカットオフ  $\Lambda$  を導入した。 $d > 4$  では積分が収束し、 $\Lambda^{d-4}$  程度になるのに対し、 $d \leq 4$  で積分は赤外発散する。特に  $d = 4$  は赤外で対数発散になることがわかる。

ランダウ理論では比熱の異常は有限の飛びで、発散ではなかった。ここでの結果は、 $d \leq 4$  の臨界点付近では、ランダウ理論が(したがって、平均場近似も)有効ではないことを意味している。その境となる  $d = 4$  を upper critical dimension と呼ぶ。では、 $d < 4$  のとき、どの程度臨界点に近いとランダウ理論が破綻するのだろうか。ゆらぎによる比熱の増大がランダウ理論での比熱の飛びの大きさ程度に成長するところというのがひとつの指標になるだろう。 $k$  の下限が  $1/\xi$  で抑えられるので、比熱の大きさは  $a^2 \xi^{4-d}/c^2$  程度である。

比熱の飛びを  $\Delta C = a^2 T / 2b$  とすると、ランダウ理論が成り立つのは

$$\Delta C \ll \left(\frac{a}{c}\right)^2 \xi^{4-d} = \left(\frac{a}{c}\right)^{d/2} t^{d/2-2} \quad (161)$$

$$t^{2-d/2} \gg \left(\frac{a}{c}\right)^{d/2} \frac{1}{\Delta C} \quad (162)$$

このようにランダウ理論の適用範囲を判定する基準を一般に Ginzburg criterion と呼ぶ。ランダウ理論の破綻は空間ゆらぎの赤外発散に起因する。赤外発散は長波長側での発散なので、空間的にゆっくり変化する揺らぎが臨界点付近での発散を引き起こすことがわかる。このような長波長揺らぎの特徴を引き出すには、短波長成分を消して長波長に注目してゆっくりこみ群が有効である

## 4 臨界指数と現象論的スケーリング理論

### 4.1 臨界指数

臨界現象ではさまざまな物理量が  $|T - T_c|$  のべき乗に従う。その「べき則」を表す指数を臨界指数と呼んでいる。ここで、臨界指数を整理しておこう。

1. 比熱

$$C_v \sim |T - T_c|^{-\alpha} \quad (163)$$

2.  $T < T_c$  での自発磁化

$$m \sim |T - T_c|^\beta \quad (164)$$

3. 帯磁率

$$\chi \sim |T - T_c|^{-\gamma} \quad (165)$$

4.  $T = T_c$  での磁化の磁場依存性

$$m \sim H^{1/\delta} \quad (166)$$

5. 相関距離

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu} \quad (167)$$

6.  $T = T_c$  での相関関数の距離依存性

$$G(r) \sim r^{-(d-2+\eta)} \quad (168)$$

### 4.2 スケーリング理論

これらの臨界指数はすべてが独立なわけではない。臨界指数間の関係を現象論的に導出したのは Kadanoff だった。<sup>6</sup> 自由エネルギー密度を  $t = \frac{T-T_c}{T_c}$  と  $h = \frac{H}{T}$  の二変数関数  $f(t, h)$  としよう。ここで、なんらかの意味で系を見るスケールを  $b$  倍する。元の長さ 1 が  $1/b$  に見えるように系のスケールを小さくするか、あるいは遠ざかって眺めると考えてもよい。これはただ単に見るスケールを変えただけなので自由エネルギーは変わらないが、見かけの温度や磁場は変化するだろう。つまり、ある温度の系を遠くから眺めると別の温度の系に見えると考えられるわけである。自由エネルギー

<sup>6</sup>Kadanoff はこの導出の過程で繰り込み群の考え方にほとんど到達していた。

が不変なら、自由エネルギー密度は  $b^d$  倍だけ変わる (スケールを変えたことによる自明な変化) から、元の自由エネルギー密度と新たなスケールでの自由エネルギー密度とのあいだに

$$b^d f(t, h) = f(b^{y_t} t, b^{y_h} h) \quad (169)$$

という関係を仮定する (遠くから見たほうが、自由エネルギー密度は  $b^d$  倍になることに注意)。  $y_t$  と  $y_h$  が温度と磁場の変化を表現する指数である。

まず  $t < 0$  での自発磁化を考えよう。磁化は自由エネルギー密度を磁場で微分すればよい。両辺を  $h$  で微分して  $h = 0$  とおけば

$$m(|t|, 0) = b^{y_h - d} m(b^{y_t} |t|, 0) \quad (170)$$

これは、系を少し遠くから眺めると、磁化の空間揺らぎが均されて、元とは違う値になることを表している。それをその磁化に相当する温度に変化したとみなすわけである。スケール  $b$  は任意だったので、  $b = |t|^{-1/y_t}$  とおいてみれば

$$m(t, 0) = |t|^{(d - y_h)/y_t} m(1, 0) \quad (171)$$

となる。ところが、臨界指数の定義から  $m(t, 0) \sim |t|^\beta$  だったので

$$\beta = \frac{d - y_h}{y_t} \quad (172)$$

でなくてはならない。

同様に  $t = 0$  (臨界点) での磁化の磁場依存性は

$$m(0, h) = b^{y_h - d} m(0, b^{y_h} h) \quad (173)$$

今度は  $b = h^{-1/y_h}$  とおくと

$$m(0, h) = h^{(d - y_h)/y_h} m(0, 1) \quad (174)$$

臨界指数の定義から  $m(0, h) \sim h^{1/\delta}$  だから

$$\delta = \frac{y_h}{d - y_h} \quad (175)$$

である。またこのふたつから

$$\beta\delta = \frac{y_h}{y_t} \quad (176)$$

であることもわかる。

次に零磁場帯磁率を考えよう。これは磁化をさらに磁場で微分して、  $h = 0$  とすればよい。  $t > 0$  でも  $t < 0$  でも同じなので

$$\chi(t, 0) = b^{2y_h - d} \chi(b^{y_t} t, 0) \quad (177)$$

やはり、  $b = |t|^{-1/y_t}$  とおいて

$$\chi(t, 0) = t^{(d - 2y_h)/y_t} \chi(1, 0) \quad (178)$$

臨界指数の定義  $\chi(t, 0) \sim |t|^{-\gamma}$  から

$$\gamma = \frac{2y_h - d}{y_t} \quad (179)$$

が得られる。 $t > 0$  と  $t < 0$  で臨界指数  $\gamma$  が共通であることは、これからわかる。これより、 $\beta$ 、 $\gamma$ 、 $\delta$  のあいだに

$$\beta + \gamma = \frac{y_h}{y_t} = \beta\delta \quad (180)$$

という関係が導かれる。このような臨界指数間をスケーリング関係式と呼ぶ。

こんどは比熱を考えよう。比熱は本質的に自由エネルギーを温度で 2 回微分したものだから、 $f$  を  $t$  で 2 回微分すると

$$C(t, 0) = b^{2y_t - b} C(b^{y_t} t, 0) \quad (181)$$

例によって、 $b = |t|^{-1/y_t}$  において

$$C(t, 0) = |t|^{(d-2y_t)/y_t} C(1, 0) \quad (182)$$

臨界指数は  $C(t, 0) \sim |t|^{-\alpha}$  なので

$$\alpha = \frac{2y_t - d}{y_t} \quad (183)$$

これより、スケーリング関係式

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (184)$$

が得られる。

相関距離  $\xi$  は長さのスケール変換に対して自明に変化するはずである。つまり

$$\frac{\xi(t, 0)}{b} = \xi(b^{y_t} t, 0) \quad (185)$$

となるだろう。 $b = |t|^{-1/y_t}$  において

$$\xi(t, 0) = |t|^{-1/y_t} \xi(1, 0) \quad (186)$$

臨界指数の定義  $\xi(t, 0) \sim |t|^{-\nu}$  より

$$\nu = \frac{1}{y_t} \quad (187)$$

したがってスケーリング関係式

$$\alpha = 2 - d\nu \quad (188)$$

が得られる。前のふたつのスケーリング関係式が空間次元に関係なく成り立ったのに対し、この式には空間次元が現れている。このような空間次元を含む関係式をハイパースケーリング関係式と呼ぶ。ハイパースケーリング関係式は upper critical dimension 以上では成立しないことが知られている。

これまでの結果から、 $y_t$  と  $y_h$  を普通の臨界指数で表すと

$$y_t = \frac{1}{\nu} \quad (189)$$

$$y_h = \frac{\beta\delta}{\nu} = \frac{\beta + \gamma}{\nu} \quad (190)$$

最後に臨界点での二点相関関数  $G(r)$  を考えよう。これは本質的には  $r$  だけ離れた二力所での局所的な磁化の積であるから、スケールを変えると磁化の二乗のように変化するだろう。一方、二点間の距離は自明な変更を受けるから

$$G(r) = b^{2(y_h - d)} G(r/b) \quad (191)$$



ここで  $b = r$  とおけば

$$G(r) = r^{2(y_h - d)} G(1) \quad (192)$$

である。いっぽう、臨界指数の定義から  $G(r) \sim r^{-(d-2+\eta)}$  なので

$$2(d - y_h) = d - 2 + \eta \quad (193)$$

これを整理すれば

$$\eta = d + 2 - 2y_h \quad (194)$$

これに  $y_h = (\beta + \gamma)/\nu$  を代入して、他のスケーリング関係式を使えば、新たなスケーリング関係式として

$$\gamma = \nu(2 - \eta) \quad (195)$$

が得られる。

まとめると、現象論的なスケーリング理論では、系を見るスケールを変化させたときに温度や磁場がスケールに応じた変換を受けると考えて、それぞれに対応する臨界指数  $y_t$  と  $y_h$  を導入する。既知の臨界指数はすべて、このふたつの臨界指数と空間次元との組み合わせで表すことができる。本質的に独立な臨界指数は  $y_t$  と  $y_h$  のふたつだけである。ただし、ここでは何か証明されたわけではなく、むしろ、本質的に独立な臨界指数がふたつしかないと仮定して、臨界指数間の関係式を導いたことに注意。これらのスケーリング関係式のうち、ハイパースケーリング関係式以外は、平均場近似でも成立している。ただし、平均場では比熱が発散しないので、 $\alpha = 0$  と考える。ハイパースケーリング関係式は  $d = 4$  でのみ成立する。また、二次元イジングモデルの厳密解ではハイパースケーリングも含めて成立している。<sup>7</sup>

## 5 1次元イジングモデルの実空間くりこみ群

### 5.1 くりこみ群と固定点

臨界現象の文脈でのくりこみ群を標語的に言うと「分配関数を不変に保ちつつ、系を空間的に順次粗視化していったときの、ハミルトニアンの変換性」のことである。

まずは練習問題として、最も簡単な1次元イジングモデルをとりあげよう。 $\pm 1$ をとる  $N$ 個のスピン変数  $S$  がリング状に並んでいる（つまり、周期的境界条件）として、以下のハミルトニアンを考える。

$$H = -J \sum_{i=0}^{N-1} S_i S_{i+1} \quad (196)$$

必要に応じて  $N$  はいくらでも大きくとれるものとする。分配関数  $Z$  は  $e^{-H/k_B T}$  をすべてのスピンの状態について足したものである。多くの初等的な統計力学の教科書に書かれているように、この足し算は転送行列の方法などで厳密に実行できる。しかし、ここではすべてのスピンについての状態和を一気に実行せず、先に奇数番スピンの状態についてのみ和を取ってみよう。

$$Z = \sum_{S_0=\pm 1} \sum_{S_1=\pm 1} \cdots \sum_{S_{N-1}=\pm 1} \left( \prod_{i=0}^{N-1} e^{K_0 S_i S_{i+1}} \right) \quad (197)$$

$$= 2^{N/2} \sum_{S_0=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \cdots \sum_{S_{N-2}=\pm 1} \times \left( \prod_{i:\text{even}} \cosh K_0 (S_i + S_{i+2}) \right) \quad (198)$$

<sup>7</sup>三次元イジングモデルの数値計算でもスケーリング関係式が確認できているかということ、数値計算で独立に求められているのは  $y_t$  と  $y_h$  のふたつで、それ以外の臨界指数はスケーリング関係式から求めていると考えるべきだと思う

ただし,  $K_0 = J/k_B T$  である. 相互作用定数  $J$  と温度  $T$  は比としてしか現れないから,  $K_0$  をハミルトニアン (唯一の) パラメータと呼んでおく.  $K_0$  が大きい (小さい) 極限を強結合 (弱結合) と呼んでもよいし低温 (高温) と呼んでもよい.

ここで

$$\cosh K_0(S_i + S_{i+2}) = e^{K_1 S_i S_{i+2} + L_1} \quad (199)$$

となる  $K_1$  と  $L_1$  の組を求めてみよう.  $S$  は  $\pm 1$  のいずれかしかとらないのだから, 両辺が関数として完全に一致する必要はなく,

$$K_1 = L_1 = \frac{1}{2} \log \cosh 2K_0 \quad (200)$$

であればよい. さらにスピンの番号を  $i \rightarrow i/2$  とつけかえれば

$$Z = (2e^{L_1})^{N/2} \sum_{S_0=\pm 1} \sum_{S_1=\pm 1} \cdots \sum_{S_{N/2-1}=\pm 1} \times \left( \prod_{i=0}^{N/2-1} e^{K_1 S_i S_{i+1}} \right) \quad (201)$$

と書ける. これは全体の係数を除くと, スピン数が  $N/2$  のイジングモデルの分配関数にほかならない. ただし, パラメータ  $K_0$  は  $K_1$  に変化している. 全体の係数は物理量の熱平均を取る際に分子・分母で相殺するので, 自由エネルギーの値そのものを議論しないなら無視してよい. つまり, スピン数  $N$  でパラメータが  $K_0$  であるイジングモデルの性質は, スピン数が半分でパラメータが  $K_1$  であるイジングモデルのものと厳密に同じである. この操作の概念図を図 5.1 に示す.

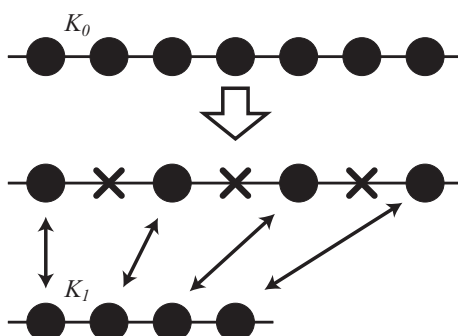


図 1: パラメータ  $K_0$  の 1 次元イジングモデルについて,  $\times$  印のスピンの状態和をとると, スピン数が半分でパラメータ  $K_1$  の 1 次元イジングモデルに変換される.

この操作を繰り返すと, そのたびにスピン数が半分になり, パラメータは

$$e^{2K_{n+1}} = \cosh 2K_n \quad (202)$$

にしたがって変化する. この一連の操作をここではくりこみ群変換 (RG) と呼んでおこう. スピンを消去する操作が局所的であることを反映して, パラメータの変化は全スピン数  $N$  に依存しない点を注意しておく.

パラメータがこの変換で不変に保たれるとき, モデルは繰り込み群の固定点にあるという. 固定点を  $K^*$  と書くと, 固定点は  $K^* = 0$  と  $K^* = \infty$  のふたつであり, それぞれ温度無限大と 0 とに対応している.  $K_n$  が大きいところで RG の式は

$$e^{2K_{n+1}} \simeq \frac{1}{2} e^{2K_n} \quad (203)$$

と書けるので、温度 0 の固定点は不安定である。つまり、どれほど固定点に近い  $K$  から出発したとしても、RG 変換を繰り返すと系はこの固定点から離れていく。一方、 $K_n$  が小さいときの RG は、テイラー展開して

$$K_{n+1} \simeq K_n^2 \quad (204)$$

なので、温度無限大の固定点は安定である。<sup>8</sup> 結局、温度がちょうど 0 でない限り、あらゆる温度のイジングモデルは繰り込み群変換によって温度無限大に向かってゆく。温度無限大は無秩序状態だから、スピンを消去するにつれて無秩序状態に近づくわけである。

1 次元イジングモデルは有限温度で相転移を示さず、常磁性状態にとどまる。 $1/K_0 = 0$  以外の全温度領域が繰り込み群変換によって高温無限大に移っていくのはその事実を反映している。基底状態は自明に強磁性なので、このモデルでは臨界点が温度 0 にあるとみなすことができる。

## 5.2 相関関数

そこで、 $N$  スピン系について、距離が  $2^n$  だけ離れたふたつのスピン間の相関関数

$$G(2^n, K_0, K) = \langle S_0 S_{2^n} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{S\}} S_0 S_{2^n} \exp \left( K \sum_i S_i S_{i+1} \right) \quad (205)$$

を求めることを考えよう。繰り込み群変換を  $n$  回繰り返すと、元の系での  $S_{2^n}$  は新しい系での  $S_1$  になる。したがって、 $G(2^n, K_0, N)$  を求めたければ、 $K_n$  の系（スピン数  $\frac{N}{2^n}$ ）での最近接スピン相関関数を計算すればよい。ところが、繰り込み群変換を多数回繰り返すことによって、変換後の系をいくらでも高温にできるから、最低次の高温展開が十分に正確であるような  $n$  をいつでも設定できる。このとき、

$$e^{K_n \sum S_i S_{i+1}} \simeq 1 + K_n \sum S_i S_{i+1} \quad (206)$$

とすればよく、結局

$$G(2^n, K_0, N) = G(1, K_n, \frac{N}{2^n}) \simeq \frac{\sum S_0 S_1 (1 + K_n \sum S_i S_{i+1})}{\sum (1 + K_n \sum S_i S_{i+1})} = K_n \quad (207)$$

と計算できる。もちろん、最低次の高温展開が正確であるためには、元の系が低温であればあるほど、くりこみ群変換を多数回繰り返す必要がある。したがって、この関係は低温であるほど長い距離の相関についてのみ成り立つ。つまり、長距離の相関については「繰り込み群変換+最低次の高温展開」で任意の温度での相関関数が求められることになる。

実際に RG の式から数値計算で求めた  $K_n$  と転送行列を用いて厳密に求めた  $N \rightarrow \infty$  での 2 点相関関数を  $n$  に対してプロットしたのが図 5.2 である。両者は  $n$  が大きくなるにつれて接近し、相関の値がおおむね 0.5 以下となる距離ではほぼ一致するのがわかる。

さて、 $N$  スピン系で距離が二倍違うふたつの相関関数を考えて、高温でのくりこみ群変換の結果を使うと、充分大きな  $n$  に対して  $\log G$  は

$$\frac{\log G(2^n, K_0, N)}{\log G(2^{n-1}, K_0, N)} = \frac{\log K_n}{\log K_{n-1}} = 2 \quad (208)$$

と同次形になることがわかる。そこで、相関関数がなめらかで、距離が充分大きいところではこの関係が  $2^n$  以外の距離についてもなりたつと期待すれば

$$\log G(2r, K, N) = 2 \log G(r, K, N) \quad (209)$$

<sup>8</sup>RG 変換によってパラメーターが固定点に近づくときその固定点は安定固定点、固定点から遠ざかるときは不安定固定点と呼ばれる

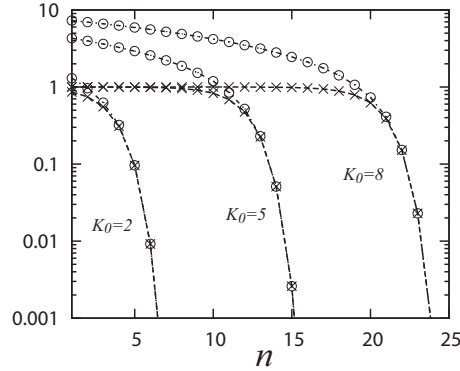


図 2: 厳密な 2 点相関関数  $G(2^n, K_0)$  (×) とくりこみ群変換で求めた  $K_n$  (○) .

つまり、 $\log G$  は  $r$  に比例する。<sup>9</sup> $K_0$  の関数  $\xi(K_0, N)$  を使って、比例係数を  $-\frac{1}{\xi(K_0, N)}$  とおくと<sup>10</sup>

$$G(2^n, K_0, N) = \exp\left(-\frac{2^n}{\xi}\right) \quad (210)$$

と書いてよいだろう。つまり、 $\xi(K_0, N)$  は相関距離である。あるいは

$$\xi(K_0) = -2^n / \log K_n \quad (211)$$

と書ける。相関距離は  $n$  によらない定数なので、この式は右辺が  $n \rightarrow \infty$  で一定値に収束することを主張している。実際、RG 変換の式から、 $n$  の大きいところで分母は  $2^n$  に比例する。そこで、 $K_0$  から始めて、上の式が収束するまで RG 変換を繰り返せば、相関距離が求められる。数値計算でよければ、これは容易に実行でき、長距離について実際に収束することを確認される。逆に、これが収束しなければ、距離が充分でなかったことになる。 $K_0$  が大きいほど収束に必要な  $n$  が大きく、したがって  $\xi$  は長くなる。

この計算は  $1/K_0 = 0$  以外の任意の温度で正しいので、この結果を低温の性質を調べるために使うことができる。ここで

$$w \equiv e^{2K} \quad (212)$$

と置こう。すると、RG 変換は

$$w_{n+1} = \frac{1}{2} \left( w_n + \frac{1}{w_n} \right) \quad (213)$$

と書ける。これは充分に低温では

$$w_{n+1} = \frac{w_n}{2} \quad (214)$$

である。そこで、このパラメータ  $w$  と  $\frac{w}{2}$  のふたつの系を用意してに対してそれぞれ充分多数回 ( $n$  と  $n'$  とする)RG 変換を行なうと、それぞれ

$$\xi(w, N) = -\frac{2^n}{\log K_n(w)} \quad (215)$$

$$\xi\left(\frac{w}{2}, N\right) = -\frac{2^{n'}}{\log K_{n'}\left(\frac{w}{2}\right)} \quad (216)$$

<sup>9</sup> $r$  について周期 2 の振動関数である可能性は考えない

<sup>10</sup> $K_n$  が充分小さいとしているので  $\log K_n < 0$

となる。ところが、 $w$  と  $\frac{w}{2}$  は一度の RG 変換で結ばれるから

$$K_n(w) = K_{n-1}\left(\frac{w}{2}\right) \quad (217)$$

となるはずである。そこで、 $n' = n - 1$  と選んで

$$\xi\left(\frac{w}{2}, N\right) = -\frac{2^{n-1}}{\log K_n(w)} \quad (218)$$

これより

$$\xi\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{\xi(w)}{2} \quad (219)$$

この同次関係が任意の  $w$  と  $w'$  についても成り立つと期待すれば、 $\xi$  は  $w$  に比例する。したがって

$$\xi(w) \propto w = e^{2K} \quad (220)$$

が成り立つ。結果として、温度 0 に向かうにつれ、相関距離は  $e^{2K}$  に比例して指数的に発散することが導かれる。

つまり、長距離のスピン相関は安定固定点の性質として理解でき、その臨界点付近での発散のしかたは不安定固定点付近での繰り込み群によって理解できたわけである。結局、繰り込み群変換によって温度 0 以外の任意の温度の系が安定固定点に近付き、そこでは最低次の高温展開で物理量を計算できた。この方法により、長距離の振舞いに関する限り、(少なくとも数値的には) 厳密な結果が得られる。逆に元の温度がどれほど低温であっても繰り込み群変換によって温度無限大にうつされてしまうので、不安定固定点である温度 0 の近くでの摂動展開 (低温展開) では、長距離の振舞を記述できない。秩序状態からの摂動で無秩序状態を記述しようと思えば、無限に高い次数まで必要になるのは、当然といえば当然なのだが、それがなぜ当然なのかを固定点の安定性で説明できるのが繰り込み群のいいところである。

しかし、これではスピンを単にどんどん消していっただけで、残ったスピンは元のスピンのままだから、あまり粗視化したという感じはしないかもしれない。これは、スピンの繰り込み (場の理論で言えば、場の繰り込み) が起きていないことに相当する。大きなスケールで見てもスピンはやっぱりスピンというわけだが、これは繰り込み群としてあまり自然ではない。実際、この 1 次元イジングモデルの繰り込み群は相当特殊な例というべきである。そもそも、繰り込み群変換で完全に元と同じモデルに変換される例がまず珍しい。システムサイズが結果にほとんど顔を出さないのも、同じ事情による。厳密にできる計算ではあるが、決して繰り込み群の典型的な例というわけではない。

## 6 スカラー $\phi^4$ モデルの摂動論的くりこみ群

### 6.1 モデル

ランダウ理論に基づく一様な平衡状態からの揺らぎを考えると、臨界点付近では平衡状態が揺らぎによって壊れることがわかった。したがって、平衡状態を仮定した理論は有効ではない。そこで、最初から揺らぎを取り入れたモデルで平衡状態そのものを求めることにする。

前と同様、空間を一辺  $l_0$  の立方体領域に分割する。 $l_0$  はもっともマイクロなスケールである原子間距離に比べれば十分に長く、もっともマクロなスケールであるシステムサイズに比べれば充分小さいスケールで、あとで連続極限をとる際には、これより短いスケールの構造はないものと考えられる。個々の領域内では秩序パラメーター  $\phi$  は一様とみなせるとすると、

$$\int_{l_0^d} \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = l_0^d \phi(\mathbf{r}) \quad (221)$$

この領域での平衡状態はランダウ自由エネルギーで決まるものと仮定する。全系ではなく、あくまでも粗視化領域でランダウ理論が成り立つものと考えるので、低温でも対称性の破れた状態のいずれかが実現するのではなく、熱ゆらぎによって対称性の破れた状態間での遷移があり、熱平衡状態としては対称性は破れない。対称性が自発的に破れるのは、あくまでも熱力学極限での現象である。

つまり、領域内での自由エネルギー密度は

$$\beta f = \frac{1}{2} t \phi^2 + \frac{1}{4!} u \phi^4 \quad (222)$$

と書ける。

これに隣接領域間ではなるべく  $\phi$  の値が揃うように gradient の項を付け加える。各領域について、自由エネルギー密度に

$$\frac{1}{2} a l_0^2 (\nabla \phi)^2 \quad (223)$$

を加える。  $a$  は gradient 項の強さを与える適当な定数。

この自由エネルギーを全系について足したものが、全系の有効ハミルトニアンとなる。連続極限をとると

$$H = \int \left( \frac{1}{2} a l_0^2 (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} t \phi^2 + \frac{1}{4!} u \phi^4 \right) dV \quad (224)$$

となる。

この有効ハミルトニアンには  $(a, t, u)$  の三つのパラメーターが含まれるが、これは全体の係数とあとふたつのパラメーターに書き直せる。さらに、全体の係数を  $\phi$  に含ませてしまうと、三項のうち、どれかひとつを係数なしにできる。ここで、場の量子論との対応を考えて、gradient 項を係数なしにしよう。つまり、  $\sqrt{a} l_0 \phi \rightarrow \phi$  とする。  $t$  と  $u$  はそれにあわせて  $\sqrt{a} l_0$  でスケールするが、同じ記号を使うことにして

$$H = \int \left( \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} t \phi^2 + \frac{1}{4!} u \phi^4 \right) dV \quad (225)$$

このようにすると、もともと無次元だった  $t$  にも次元を与えたことになる。各変数の次元は、積分全体が無次元であるから

$$[(\nabla \phi)^2] = [L^{-2} \phi^2] = [L^{-d}] \quad (226)$$

$$[\phi] = [L^{1-d/2}] \quad (227)$$

$$[t] = [\nabla^2] = [L^{-2}] \quad (228)$$

$$[u] = [L^{2d-4} L^{-d}] = [L^{d-4}] \quad (229)$$

ここで、  $u$  が  $d = 4$  で無次元になるのは重要である。そこで、再び  $t$  と  $u$  を無次元にする ( $u$  はあとで摂動展開パラメータにするので、無次元でなくてはならない)。この問題に現れる長さのスケールは粗視化スケール  $l_0$  だけであるから、次元はこれに持たせる。あとでフーリエ変換することを考えて、粗視化の波数  $\Lambda \sim 1/l_0$  を導入すると、最終的なモデルは

$$H = \int \left( \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} t\Lambda^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} u\Lambda^{4-d} \phi^4 \right) dV \quad (230)$$

となる。これは場の量子論との対応からスカラー  $\phi^4$  モデルなどと呼ばれる。

ここで、gradient 項と他の項の大きさの関係は任意だったが、 $t$  と  $u$  の大きさをいろいろ変えられるので、gradient 項の係数を固定しても一般性は失わない。これで、分配関数は

$$\int D\phi e^{-\int (\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}t\Lambda^2\phi^2 + \frac{1}{4!}u\Lambda^{4-d}\phi^4) dV} \quad (231)$$

## 6.2 フーリエ変換

このままでは計算しづらいので、フーリエ変換する。短波長側は波数の大きさ  $|k| < \Lambda$  が cut-off になっている。

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{|k|<\Lambda} e^{i\mathbf{r}\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} \quad (232)$$

$\phi(\mathbf{r})$  は実数なので

$$\phi_{\mathbf{k}}^* = \phi_{-\mathbf{k}} \quad (233)$$

粗視化という観点からすると、波数を  $\Lambda$  で完全に打ち切る hard cutoff は少々不自然だが、この計算には影響しないので、hard cutoff にしておく。なお、場の量子論ではこの cutoff を最終的に無限大にしたいので紫外発散が問題になるが、物性の問題では紫外発散は生じない (仮に粗視化しないとしても、短波長側は原子間距離で抑えられる)。これを使うと

$$H = \frac{V}{2} \sum_{|k|<\Lambda} (k^2 + t\Lambda^2) |\phi_{\mathbf{k}}|^2 + \frac{V}{4!} u\Lambda^{4-d} \sum_{|k|<\Lambda} \phi_{\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2} \phi_{\mathbf{k}_3} \phi_{\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4,0} \quad (234)$$

最後のクロネッカー・デルタは運動量保存を表す。

分配関数の計算には汎関数積分が必要だが、前と同様

$$D\phi(\mathbf{r}) = \prod_{\mathbf{k}} d\phi_{\mathbf{k}} d\phi_{\mathbf{k}}^* = \prod_{\mathbf{k}} d\phi'_{\mathbf{k}} d\phi''_{\mathbf{k}} \quad (235)$$

とする。自由度は適当に合わせる

これで、分配関数は

$$Z = \int \prod_{\mathbf{k}} d\phi'_{\mathbf{k}} d\phi''_{\mathbf{k}} e^{-\frac{V}{2} \sum_{|k|<\Lambda} (k^2 + t\Lambda^2) |\phi_{\mathbf{k}}|^2 + \frac{V}{4!} u\Lambda^{4-d} \sum_{|k_1 \sim k_4|<\Lambda} \phi_{\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2} \phi_{\mathbf{k}_3} \phi_{\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4,0}} \quad (236)$$

## 6.3 ガウス模型の比熱

$u = 0$  はガウス積分だけなので厳密に計算できる。これをガウス模型と呼ぶ。

$$H = \frac{V}{2} \sum_{|k|<\Lambda} (k^2 + t\Lambda^2) |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \quad (237)$$

これはランダウ自由エネルギーの平衡状態からの揺らぎを2次まで展開したものと同一関数だが、あくまでも平衡状態からの揺らぎではなく、揺らぎを含めて平衡状態を決める式である。そのため、 $t < 0$  では2次項の係数が負になるので、病的となり意味をなさない。 $t \geq 0$  のみ考える

ガウス模型の比熱の式は、揺らぎの2次まで展開して求めたものと同じだから

$$C = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^\Lambda \frac{d^d k}{(k^2 + t\Lambda^2)^2} = \frac{S_d}{(2\pi)^d} \int_0^\Lambda \frac{k^{d-1} dk}{(k^2 + t\Lambda^2)^2} \quad (238)$$

$S_d$  は半径1の  $d$  次元球の体積。

紫外側にはカットオフがあるので発散しない。一方、赤外側は分母の  $t\Lambda^2$  で抑えられているので、 $t \rightarrow 0$  で異常が起きうる。前に見たように、 $d \leq 4$  ではこれが赤外発散を引き起こす。つまり、比熱の値は

$$C \sim \Lambda^{d-4} \quad (d > 4) \quad (239)$$

$$\sim \log t \quad (d = 4) \quad (240)$$

$$\sim t^{2-d/2} \quad (d > 4) \quad (241)$$

と振舞う。

赤外発散は長波長側での発散なので、 $d \leq 4$  では空間的にゆっくり変化する揺らぎが発散を引き起こすことがわかる。長波長揺らぎの特徴を引き出すには、短波長成分を消して長波長に注目してゆく「くりこみ群」が有効である

#### 6.4 ガウス模型のくりこみ群

粗視化のスケールは勝手に決めたものだから、連続体近似ができる問題であるかぎり、定性的な性質はこのスケールのとりかたに依存しない。ただし、システムには物理的な相関距離があるので、粗視化スケールが相関距離より長いか短いかで、システムの見えかたは変わるはずである。粗視化スケールが相関距離を越えてしまえば、システムは無相関に見えるだろう。したがって、普通は粗視化スケールが相関距離よりは十分に短いものとする。

くりこみ群変換は、長波長揺らぎを正しく保つスケール変換である。そのためには、短波長成分を正しく消せばよい。

そこで、分配関数を一気に計算してしまうのではなく、波数  $\Lambda/b \sim \Lambda$  の成分のみを先に計算してしまう。ガウス積分なのでこれは厳密に実行できて

$$Z = \Pi_{\Lambda/b < |k| < \Lambda} \frac{2\pi}{V(k^2 + t\Lambda^2)} \int \Pi_{|k| < \Lambda/b} d\phi'_k d\phi''_k e^{-\frac{V}{2} \sum_{|k| < \Lambda/b} (k^2 + t\Lambda^2) |\phi_k|^2} \quad (242)$$

$\Lambda/b \sim \Lambda$  の和は自由エネルギーの値を求めるには必要だが、長波長成分に関する物理量の計算には利かない。したがって、長波長成分の分配関数は

$$Z' = \int \Pi_{|k| < \Lambda/b} d\phi'_k d\phi''_k e^{-\frac{V}{2} \sum_{|k| < \Lambda/b} (k^2 + t\Lambda^2) |\phi_k|^2} \quad (243)$$

でよい。実はこれは  $\Lambda/b \sim \Lambda$  のモードを単に捨てたことと同じだが、それは全モードが独立というガウス模型の特殊性によるもので、一般的な性質ではない

ここで、元の系と比較するために、粗視化のスケールが元と同じになるようにスケール変換する。つまり、波数  $k$  を

$$k \rightarrow k' = bk \quad (244)$$

に変数変換する。全系の体積が  $V/b^d$  になることも考慮して、有効ハミルトニアンは

$$\frac{1}{2} \frac{V}{b^d} b^d \sum_{|k'| < \Lambda} \left( \left( \frac{k'}{b} \right)^2 + t\Lambda^2 \right) |\phi_{k'}|^2 = \frac{1}{2} \frac{V}{b^d} b^{d-2} \sum_{|k'| < \Lambda} (k'^2 + b^2 t\Lambda^2) |\phi_{k'}|^2 \quad (245)$$



ただし、波数を変数変換しただけなので、 $\phi_{\mathbf{k}'}$  については単なる名前のつけかえで、元の波数  $\mathbf{k}$  をもった  $\phi$  はそのまま波数  $\mathbf{k}'$  の  $\phi$  になる。

これをむりやり元の有効ハミルトニアンと同じ式にするには (体積の自明な違いは別として)、

$$t \rightarrow t' = b^2 t \quad (246)$$

とすればよい。すると、全体の係数  $b^{d-2}$  だけが元と違うが、これを吸収できるのは  $\phi$  しかないから

$$\phi \rightarrow \phi' = b^{d/2-1} \phi \quad (247)$$

と置き換える。 $\mathbf{k}'$  をふたたび  $\mathbf{k}$  と書くことにすれば、有効ハミルトニアンは

$$\frac{1}{2} \left( \frac{V}{b^d} \right) \sum_{|\mathbf{k}| < \Lambda} (k^2 + t' \Lambda^2) |\phi'_{\mathbf{k}}|^2 \quad (248)$$

と、元と同じ形にまとめられた。

つまり、この系にパラメータ  $t$  を与えたとき、その長波長のふるまいは、サイズが  $\frac{V}{b^d}$  の系にパラメータ  $t'$  を与えたものと同じである。このようにスケール変換したときにパラメータがどのように変わるか、その変換のしかたを「くりこみ群 (Renormalization Group)」という。このモデルのパラメータは  $t$  なので、RG は

$$t \rightarrow t' = b^2 t \quad (249)$$

である。パラメータの変換と同時に、秩序パラメーター密度  $\phi$  も  $b^{d/2-1}$  倍される。 $\phi$  はもともと適当な粗視化スケール以内の秩序パラメーターの空間平均だから、粗視化スケールを変えると変更を受けるのは自然である。 $b^{d/2-1}$  倍というのは次元解析通りなので自明な変更にすぎないが、あとで見るように  $\phi^4$  モデルではこれが空間揺らぎの効果で次元解析からずれる。

システムサイズを無限大に飛ばせば、この変換は何度でもくりかえせる。変換で不変なパラメーターの値を固定点 (fixed point) と呼ぶ。これを  $t^*$  とすると

$$t^* = b^2 t^* \quad (250)$$

この解は  $t^* = 0$  と  $\infty$  のふたつだけである。 $t^* = 0$  はランダウ理論の臨界点、 $\infty$  は高温極限に相当する。高温極限は完全にランダムなので、スケール変換で不変に保たれるのは自然である。一方、ランダウ理論の臨界点が固定点になるのは、式の上では自明だが、物理的にはそれほど自明でない。

RG では固定点付近での性質が重要である。そこで、スケール変換の倍率  $b$  が 1 に近いとして、 $t^* = 0$  付近で RG を展開し、微分形で表すこともできる。新たにスケール変換のパラメーター  $l$  を導入して

$$b = e^l \quad (251)$$

としよう。ここで  $l \ll 1$  とする。RG の式を変形して

$$\frac{t' - t}{l} = \frac{e^{2l} - 1}{l} t \quad (252)$$

ここで  $l \rightarrow 0$  の極限をとれば

$$\frac{dt}{dl} = 2t \quad (253)$$

が得られる。この微分方程式の解は

$$t(l) = e^{2l} t_0 \quad (254)$$

ただし、 $t_0$  は RG 変換の初期値である。当然、変換の固定点  $t^* = 0$  は

$$\frac{dt}{dl} = 0 \quad (255)$$

の解になっている。

パラメーターが固定点から少しだけ離れているとき、RG を繰り返すことによってパラメーターがどのように変わるかを「くりこみ群の流れ (RG flow)」などという。この場合、 $t^* = 0$  付近の値は RG によって固定点から遠ざかり、 $\infty$  に向かうことはすぐにわかる。したがって、 $t^* = 0$  が不安定固定点 (unstable fixed point) で  $\infty$  が安定固定点 (stable fixed point) であり、 $t = 0$  以外のあらゆる値は RG によって  $\infty$  に近づく。つまり、長波長に注目すればするほど、高温の系に見える。これは、相関距離が存在して、相関距離よりも長いスケールまで粗視化すると無相関の系に見えるということである。

秩序パラメーターの 2 点相関関数

$$G(t, r) = \langle \phi(0)\phi(r) \rangle_t \quad (256)$$

を考える。RG によって、もともと  $br$  の距離にあった 2 点が  $r$  の距離に近づく。またその際に秩序パラメーターは  $b^{d/2-1}$  倍されるから、くりこまれた系の 2 点相関関数は

$$G(t, r) = \langle \phi'(0)\phi'(r) \rangle_t = b^{d-2} \langle \phi(0)\phi(br) \rangle_{t/b^2} = b^{d-2} G(t/b^2, br) \quad (257)$$

$t = 0$  では簡単に

$$G(r) = b^{d-2} G(br) \quad (258)$$

だから、 $G$  は  $r$  の同次関数で

$$G(r) \propto \frac{1}{r^{d-2}} \quad (259)$$

と power law で減衰することがわかる。同次関数であることが、特定の長さスケール (この場合は相関距離) を持たないことに対応する。ただし、臨界指数としてはこれは  $\eta = 0$  に対応している。

いっぽう、 $t > 0$  なら power law ではなくなる。相関距離  $\xi$  が存在して、 $\xi \gg \frac{1}{\Lambda}$  であるとすると、長距離の振る舞いは変わらないから

$$\xi(t) = b\xi(b^2t) \quad (260)$$

したがって、相関距離は

$$\xi(t) \propto t^{-1/2} \quad (261)$$

と、 $t = 0$  に向かって発散する。臨界指数は  $\nu = \frac{1}{2}$  なので、平均場近似と同じ結果である。この解析では、 $\xi \gg \frac{1}{\Lambda}$  を仮定しているから、不安定固定点近くでの RG を使っていることに注意。

ガウス模型では、 $t = 0$  から  $\infty$  までのすべての領域で  $t' = b^2t$  が成り立つ。粗視化スケールが相関距離よりも十分に短いところから、粗視化スケールと相関距離が同程度になり、相関距離より長いスケールまで粗視化していくあいだ、 $t$  は一貫して同じ変換を受ける。これは異なる波長のモード間に相互作用がなく、各波長モードが独立であるというガウス模型の特殊性によっている。

## 6.5 繰り込み群の手続き

結局、やったことをまとめると、あるスケールで粗視化された系の有効ハミルトニアンから、短波長モードについて状態和をとってしまうことによって、より大きなスケールで粗視化された系

の有効ハミルトニアンを作り、粗視化スケールを一致させたときに有効ハミルトニアンのパラメータがどう変化するかを調べた。もとの有効ハミルトニアンを  $H$  と書くと

$$H' = -f(t) - \log \int \Pi_{\Lambda/b < |k| < \Lambda} d\phi_k d\phi_k^* e^{-H} \quad (262)$$

として、新しい有効ハミルトニアン  $H'$  を作る。  $f(t)$  は積分で出てきた  $\phi$  によらない部分で、これは  $\phi$  の長波長の振る舞いには影響しないので捨ててよい。

次に、粗視化スケール (波数 cutoff) が元のスケールになるように

$$\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}' = b\mathbf{k} \quad (263)$$

とスケール変換する。さらに、  $H$  と  $H'$  が同じ形になるようにパラメータや  $\phi$  を適切に再定義すればよい。もちろん、  $H$  と  $H'$  が必ず同じ形にできるとは限らず、むしろ、一般には同じ形にならないが、それについてはあとで議論する。

## 6.6 スカラー $\phi^4$ モデルの摂動展開

$u \neq 0$  のモデルはスカラー  $\phi^4$  モデルなどと呼ばれる。物性の問題としてはイジングモデルを粗視化したものだと思っておけばよい。このモデルにくりこみ群を行いたい、非ガウスの項があるので厳密には計算できない。そこで、4次項については摂動計算する。  $u$  を小さな展開パラメータとし

$$H = H_0 + uH_I \quad (264)$$

と有効ハミルトニアンを分ける。すると

$$\begin{aligned} \int \Pi_{\Lambda/b < |k| < \Lambda} d\phi_k d\phi_k^* e^{-H} &= \int \Pi_{\Lambda/b < |k| < \Lambda} d\phi_k d\phi_k^* e^{-H_0} e^{-uH_I} = \langle e^{-uH_I} \rangle_0 Z_0 \\ \langle A \rangle_0 &= \frac{1}{Z_0} \int \Pi_{\Lambda/b < |k| < \Lambda} d\phi_k d\phi_k^* A e^{-H_0} \\ Z_0 &= \int \Pi_{\Lambda/b < |k| < \Lambda} d\phi_k d\phi_k^* e^{-H_0} \end{aligned}$$

状態和は  $\Lambda/b \sim \Lambda$  の波数についてのみ行うことに注意。

したがって、指数関数を展開すると

$$\log \int \Pi_{\Lambda/b \sim \Lambda} e^{-H} = \log Z_0 + \log \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \langle (-H_I)^n \rangle_0 = \log Z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \langle (-H_I)^n \rangle_{0c} \quad (265)$$

ただし、  $\langle (-H_I)^n \rangle_{0c}$  は  $-H_I$  の  $n$  次のキュムラントを意味し、

$$\langle H_I \rangle_{0c} = \langle H_I \rangle_0 \quad (266)$$

$$\langle (H_I)^2 \rangle_{0c} = \langle (H_I)^2 \rangle_0 - \langle H_I \rangle_0^2 \quad (267)$$

等である。

$u^0$  項に相当する  $\log Z_0$  はガウス模型と同じものなので

$$\log Z_0 = \sum_{\Lambda/b < |k| < \Lambda} \log \frac{2\pi}{V(k^2 + t\Lambda^2)} - \frac{V}{2} \sum_{|k| < \Lambda/b} (k^2 + t\Lambda^2) |\phi_k|^2 \quad (268)$$

したがって、 $H'$  の摂動展開を具体的に書くと

$$H' = \frac{V}{2} \sum_{|k| < \Lambda/b} (k^2 + t\Lambda^2) |\phi_{\mathbf{k}}|^2 + u \langle H_I \rangle_0 - \frac{u^2}{2} (\langle H_I^2 \rangle_0 - \langle H_I \rangle_0^2) + O(u^3) \quad (269)$$

ただし、前述のように  $\phi$  を含まない項は物理量の計算に影響しないので無視した。自由エネルギーそのものが必要な場合にはこの項が必要となる。

摂動項の  $H_I$  は  $\phi$  を四つ含む。  $H_I^n$  について期待値を計算するわけだが、この際には、各  $\phi$  の波数がそれぞれ  $\Lambda/b < |k| < \Lambda$  の範囲にあるか  $|k| < \Lambda$  の範囲にあるかによって、積分されるかされないかが決まる。積分は Gauss 積分なので、 $\phi$  が二個ひと組で  $|\phi_{\mathbf{k}}|^2$  の形にならない限り、0 になる。この事情を以下の簡単な式について考えてみよう (この式は摂動展開には現れない)

$$S = \sum_{|k, k'| < \Lambda} \langle \phi_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}'} \rangle_0 \quad (270)$$

ふたつの波数について和の範囲をそれぞれ  $\Lambda/b < |k| < \Lambda$  と  $|k| < \Lambda$  ふたつに分け、簡単のために  $k:O$  と  $k:I$  と表記しよう (波数空間で外と内なので、Outer の O と Inner の I のつもり) すると、次の四項になる

$$S = \sum_{k:I, k':I} \phi_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}'} + \sum_{k:I} \sum_{k':O} \phi_{\mathbf{k}} \langle \phi_{\mathbf{k}'} \rangle_0 + \sum_{k:O} \sum_{k':I} \langle \phi_{\mathbf{k}} \rangle_0 \phi_{\mathbf{k}'} + \sum_{k:O, k':O} \langle \phi_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}'} \rangle_0 \quad (271)$$

ただし、第二項と第三項は  $k$  と  $k'$  という名前を入れ替えれば同じになるので、実際には三項である。  $\langle \cdot \rangle_0$  がガウス積分であることから、  $\langle \phi \rangle_0$  は 0 になり、残るのは

$$S = \sum_{k:I, k':I} \phi_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}'} + \sum_{k:O} \langle |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle_0 \quad (272)$$

である。

これをもとに、具体的に  $O(u^1)$  の項を考えよう。まず、期待値を取る前の  $H_I$  を考える。  $H_I$  に含まれる四つの  $\phi$  それぞれについて、上と同様に波数をふたつの区間に分ける。すると、

$$H_I \sim \left( \sum_{k_1:iI} + \sum_{k_1:oI} \right) \left( \sum_{k_2:iI} + \sum_{k_2:oI} \right) \left( \sum_{k_3:iI} + \sum_{k_3:oI} \right) \left( \sum_{k_4:iI} + \sum_{k_4:oI} \right) \phi_{\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2} \phi_{\mathbf{k}_3} \phi_{\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4,0} \quad (273)$$

と計 16 項に分かれる。この 16 項を I と O の数で分類すると

$$\left( \sum_{IIII} + 4 \sum_{IIIO} + 6 \sum_{IIOO} + 4 \sum_{IOOO} + \sum_{OOOO} \right) \phi_{\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2} \phi_{\mathbf{k}_3} \phi_{\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4,0} \quad (274)$$

の 5 項に整理できる。  $IIII$  は四つの  $\phi$  がすべて I、  $IOOO$  はひとつが I で三つが O などを表している。  $IIOO$  が 6 倍なのは、四つの  $\phi$  のうちのふたつを I にするかの組み合わせ総数である。

これを  $\langle \cdot \rangle_0$  で平均を計算すると、ガウス積分であることから I が奇数個の項は 0 となり、運動量保存を考慮すると残る項は

$$\begin{aligned} & (\sum_{IIII} + 6 \sum_{IIOO} + \sum_{OOOO}) \langle \phi_{\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2} \phi_{\mathbf{k}_3} \phi_{\mathbf{k}_4} \rangle_0 \delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4,0} \\ = & 6 \sum_{k:I, k':I} \langle |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle_0 \langle |\phi_{\mathbf{k}'}|^2 \rangle_0 + 6 \sum_{k:I} |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \sum_{q:O} \langle |\phi_{\mathbf{q}}|^2 \rangle_0 + \sum_{IIII} \phi_{\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2} \phi_{\mathbf{k}_3} \phi_{\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4,0} \end{aligned}$$

である。ここで、たとえば第二項は

$$\sum_{|k_1, k_2 < \Lambda/b} \sum_{\Lambda/b < |k_3, k_4| < \Lambda} \delta_{1+2+3+4,0} \phi_1 \phi_2 \int \Pi_{\Lambda/b < |k| < \Lambda} d\phi' d\phi'' \phi_3 \phi_4 e^{-H_0} \quad (275)$$

だが、ガウス積分なので  $k_3 = -k_4$  しか残らない。 $k_3 = k_4$  も残りそうだが、この場合は

$$\phi\phi = (\phi' + i\phi'')^2 = \phi'^2 - \phi''^2 + 2i\phi'\phi'' \quad (276)$$

から積分は打ち消して 0 になる。 $k_3 = -k_4$  なら運動量保存から  $k_1 = -k_2$  でなくてはならないので、残る積分は

$$\sum_{|k| < \Lambda/b} |\phi_k|^2 \sum_{\Lambda/b < |q| < \Lambda} \int \Pi_{\Lambda/b < |q| < \Lambda} d\phi' d\phi'' |\phi_q|^2 e^{-H_0} \quad (277)$$

また、第一項は  $\phi$  をふたつずつ組み合わせるので、組み合わせ総数の 6 がかかっている。

結局、一次摂動から、定数項、 $\phi^2$  項、 $\phi^4$  項が現れる。

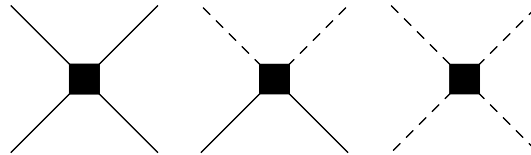
ガウス模型では異なる波数のモード間に相互作用がなく、短波長モードを積分することと単に捨てることとの違いがなかったのに対し、 $\phi^4$  モデルでは異なる波数のモードが相互作用する。この効果を摂動展開で計算するので、異なる波数間の相互作用は少しずつ取り入れたい。そのためには  $b$  は 1 よりもあまり大きくない程度にとどめておくほうがよいだろう。以下では  $b$  はおおむね 1 程度 (もちろん  $b > 1$ ) であるとする。

## 6.7 ダイアグラム

ここで、計算を見通しよくするために一種の Feynmann ダイアグラムを導入する。 $H_0$  と  $uH_I$  はそれぞれ  $\phi$  が 2 個と 4 個含まれているので、点から 2 本および 4 本の線が出ている記号で書く (図 6.7)。



積分される  $\Lambda/b < |k| < \Lambda$  の範囲の波数を持つ線は点線、残る  $|k| < \Lambda/b$  を実線で表すことにする。



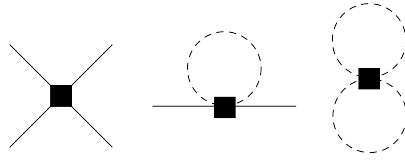
前節にしたがって  $O(u)$  の項を具体的に計算すると以下の三項にまとめられる。

$$u\langle H_I \rangle_0 = \frac{V}{4!} u \Lambda^{4-d} \sum_{|k| < \Lambda/b} \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \delta_{1+2+3+4,0} + \frac{V}{4} u \Lambda^2 I \sum_{|k| < \Lambda/b} |\phi_k|^2 + \frac{V}{4} u \Lambda^d I^2$$

$$I = \Lambda^{2-d} \sum_{\Lambda/b < |q| < \Lambda} \langle |\phi_q|^2 \rangle_0$$

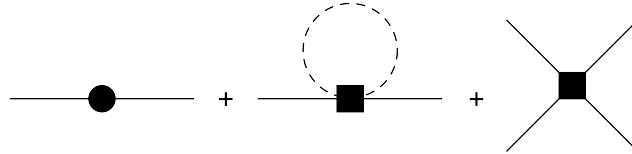
ただし、 $I$  が無次元になるようにした。

これをダイアグラムで表すと



ただし、点線がつながったものは  $I$  である。

このうち、最後の項は  $\phi$  を含まないので除くと  $O(u)$  までで  $H'$  は



となる。

$O(u^2)$  は  $\langle (-H_I)^2 \rangle_0$  と  $\langle -H_I \rangle_0^2$  の二項からなるが、後者はダイアグラムで表すと

$$\left( \text{four-point vertex} + \text{self-energy loop} + \text{tadpole} \right)^2$$

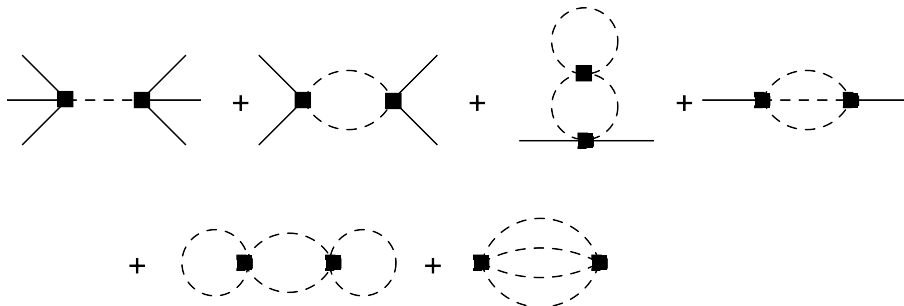
である。

いっぽう、 $\langle (-H_I)^2 \rangle_0$  からは

$$\frac{V}{4!4!} u^2 \Lambda^{2(4-d)} \sum_{k_1 \sim k_8} \langle \phi_{k_1} \phi_{k_2} \phi_{k_3} \phi_{k_4} \phi_{k_5} \phi_{k_6} \phi_{k_7} \phi_{k_8} \rangle_0 \delta_{k_1+k_2+k_3+k_4,0} \delta_{k_5+k_6+k_7+k_8,0} \quad (278)$$

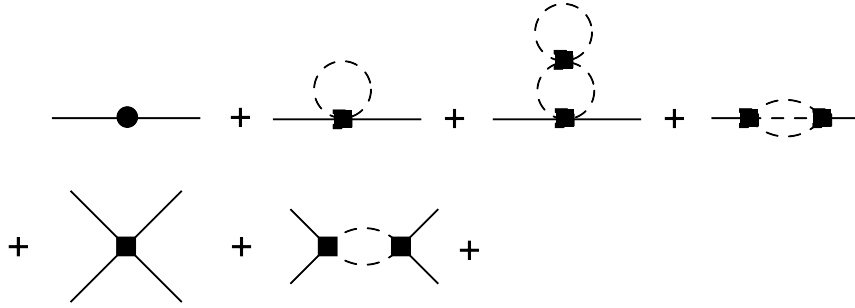
が出る。この中で値が残るのは、 $|\phi|^2$  の形の組み合わせを含むものだけである。その中には、 $\phi_1 \sim \phi_4$  と  $\phi_5 \sim \phi_8$  それぞれの中だけで  $|\phi|^2$  を作り、ダイアグラムがふたつに分離するものも含まれる。ところが、二個に分離したダイアグラムはすべて  $\langle -H_I \rangle_0^2$  に含まれているので、引き算で打ち消してしまい、分離していないダイアグラムだけが残る。これはキュムラントで展開する場合の一般的な事情で、さらに高次の計算でも連結ダイアグラムだけを考えればよい。

したがって、 $H'$  に対する  $O(u^2)$  の寄与は



となる。これ以外のダイアグラムはクロネッカー・デルタで表される運動量保存によって消える。最初のダイアグラムは  $H'$  の  $\phi^6$  項に寄与する。以下、次の2個は  $\phi^4$ 、次の2個は  $\phi^2$ 、最後の2個は定数項への寄与となる。

定数項は捨てるとして、 $\phi^6$  項はもとの  $H$  に含まれていないものなので、あとで議論する。それ以外を整理すると、 $O(u^2)$  までで  $H'$  は



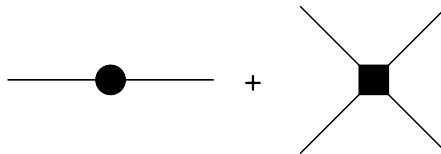
のようになる。これを縦に見ると、左の二つが元の  $H$  と同じ形を与えるダイアグラムである。これらは摂動展開でいえば  $u^0$  と  $u^1$  の項なので違う次数だが、「元と同じ形」という意味ではこの2個までを「ゼロ次」と考えるほうが見通しがよい。 $u$  の違う次数が混じっているのは、もちろん  $\phi^4$  項がもともと  $O(u)$  だからである。そこで、このふたつを出発点として、左から二列目の2個のダイアグラムを  $\phi^2$  項と  $\phi^4$  項それぞれへの最低次の補正と考える。左から三列目以降はさらに高次の補正である。 $u$  による展開を整理しなおして

$$\sum |\phi|^2 (O(u^0) + O(u^1) + O(u^2) + \dots) + u \sum \phi^4 (O(u^0) + O(u^1) + O(u^2) + \dots) \quad (279)$$

のようにまとめたことになる。このダイアグラムを眺めると、ゼロ次が線だけで構成されているのに対し、最低次の補正項はともに閉ループをひとつ含んでいる。さらに高次の補正項は ( $\phi^2$  項しか描いていないが) この図ではふたつの閉ループを含む。つまり、補正項はダイアグラム中のループの数で整理されている。これをループ展開と呼び、ゼロ次は「木構造」なので Tree、以下 1-loop、2-loop 等と言われる。

## 6.8 Tree

$H'$  に対する Tree は以下のダイアグラムで表される。



Tree は  $H$  と完全に同じ形で、違いは波数の範囲が  $|k| < \Lambda$  ではなく  $|k| < \Lambda/b$  になる点だけである。これを式で書くと

$$H' = \frac{V}{2} \sum_{|k| < \Lambda/b} (k^2 + t\Lambda^2) |\phi_{\mathbf{k}}|^2 + \frac{V}{4!} u \Lambda^{4-d} \sum_{|k| < \Lambda/b} \phi_{\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2} \phi_{\mathbf{k}_3} \phi_{\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4, 0} \quad (280)$$

これを粗視化スケールによるカットオフが元の  $\Lambda$  になるようにスケール変換する。このスケール変換に対して  $H'$  が  $H$  と (自明な体積の変化を除き) 同じ形になるように、パラメータと秩序パラメータを調整する。今の場合、パラメータは  $t, u$  である。この操作はガウス模型とほとんど同じで

$$t \rightarrow t' = b^2 t \quad (281)$$

$$\phi \rightarrow \phi' = b^{d/2-1} \phi \quad (282)$$

とすればよい。すると  $u$  については

$$u \rightarrow u' = b^{4-d}u \quad (283)$$

とすればよいことがわかる。

$t$  と  $\phi$  についてはガウス模型と同じに見えるが、 $u > 0$  とすれば低温側 ( $t < 0$ ) でも異常な自由エネルギーにならないので、 $t$  は正負ともとれるものとする。

RG は

$$t' = b^2t \quad (284)$$

$$u' = b^{4-d}u \quad (285)$$

固定点を  $t^*$ 、 $u^*$  とすると

$$t^* = b^2t^* \quad (286)$$

$$u^* = b^{4-d}u^* \quad (287)$$

であるから、 $t^* = 0, \pm\infty$ 。また、 $d = 4$  でなければ  $u^* = 0, \infty$  となる<sup>11</sup>。ただし、この計算は  $u$  による摂動展開で得られたものなので、 $u^* = \infty$  の固定点は意味を持たない。あるいは固定点  $(t^*, u^*) = (0, 0)$  付近で展開して RG を微分形で表すと

$$\frac{dt}{dl} = 2t \quad (288)$$

$$\frac{du}{dl} = (4-d)u \quad (289)$$

である。

$t^* = 0$  が unstable、 $\pm\infty$  が stable であることはすぐにわかる。それに対して、 $u^*$  の安定性は空間次元  $d$  によって変わる。 $u^* = 0$  の安定性は

$d > 4$ :  $u^* = 0$  は安定

$d = 4$ :  $u$  は RG に対して不変

$d < 4$ :  $u^* = 0$  は不安定

したがって、 $d > 4$  では  $\phi^4$  モデルの長波長のふるまいはガウス模型に帰着する<sup>12</sup>。固定点  $(t^*, u^*) = (0, 0)$  はガウス模型と同じなのでガウス固定点 (gaussian fixed point) と呼ばれる。

いっぽう、 $d < 4$  ではどれほど小さな  $u$  から始めても RG によって  $u$  はいくらでも大きくなる。これは、 $d < 4$  では長波長のゆらぎによってガウス固定点が不安定化することを意味する。ところが上の式は  $u$  を小さいパラメーターとして摂動展開で得られたものだから、これはつじつまが合っていない。つまり、Tree の範囲では摂動が破綻しており、 $d < 4$  での振舞いは求められない。わかるのはガウス固定点不安定化するというところまでである。

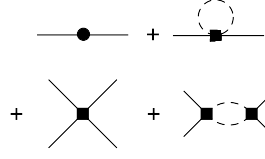
## 6.9 1-loop: $\varepsilon$ 展開

1-loop までの  $H'$  は以下のダイアグラムで表される。

<sup>11</sup> $u^* \geq 0$  に限る

<sup>12</sup>どれほど小さくても  $u > 0$  であるかぎり、自由エネルギーは  $t < 0$  でも異常ではない





$|\phi|^2$  項への 1-loop 補正はすでに求めたので、 $\phi^4$  項への補正を求める。このダイアグラムに対応する  $\phi$  の組み合わせは (1) 2 個の  $H_I$  から、それぞれふたつずつの  $\phi$  を選び波数の範囲を  $\Lambda/b \sim \Lambda$  とする。それ以外の  $\phi$  は積分されずに残る。この選び方はそれぞれ 6 通りである。(2) 選ばれた二つずつを互いに相手とつなく。このつなぎかたは 2 通りあるので、このダイアグラムに対応する組み合わせは  $6^2 \times 2$  通りある。運動量保存を考慮すると、1-loop 補正は

$$-\frac{1}{2} \frac{6^2 \times 2}{4!^2} V u^2 \Lambda^{4-d} J \sum_{|k| < \Lambda/b} \phi_{\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2} \phi_{\mathbf{k}_3} \phi_{\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4, 0} \quad (290)$$

$$J = \Lambda^{4-d} V \sum_{\Lambda/b < |q, q'| < \Lambda} \delta_{q', q + (k_1 + k_2)} \langle |\phi_q|^2 |\phi_{q'}|^2 \rangle_0 \quad (291)$$

となる。 $J$  の係数は最終結果を睨みつつ、無次元になるように決めた。

ここまですをまとめると

$$\begin{aligned} H' &= \frac{V}{2} \sum_{|k| < \Lambda/b} (k^2 + t\Lambda^2 + \frac{1}{2} u \Lambda^2 I) |\phi_k|^2 \\ &+ \frac{V}{4!} u \Lambda^{4-d} \left(1 - \frac{3}{2} u J\right) \sum_{|k| < \Lambda/b} \phi_{\mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2} \phi_{\mathbf{k}_3} \phi_{\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4, 0} \end{aligned}$$

これがスケール変換だけでは元の  $H$  と同じ形にならないことは明らかである。

$$k' = bk \quad (292)$$

というスケール変換で形が変わらないようにするためには  $\phi^2$  項から

$$t' = b^2 \left( t + \frac{1}{2} u I \right) \quad (293)$$

$$\phi' = b^{d/2-1} \phi \quad (294)$$

これを  $\phi^4$  項にいれて

$$u' = b^{4-d} u \left( 1 - \frac{3}{2} u J \right) \quad (295)$$

とすればよい。これが 1-loop での RG である。特に、 $u$  については非線形写像になっていることと  $t$  の変換には  $u$  に比例する項が含まれることの 2 点がガウス模型と大きく異なっている。

ここで、熱力学極限をとると  $I$  と  $J$  は波数についての積分に移行する

$$\begin{aligned} I &= \Lambda^{2-d} \sum_{\Lambda/b < |q| < \Lambda} \langle |\phi_q|^2 \rangle_0 = \frac{V}{(2\pi)^d} \Lambda^{2-d} \int_{\Lambda/b < |q| < \Lambda} \langle |\phi_q|^2 \rangle_0 \\ &= \frac{\Lambda^{2-d}}{(2\pi)^d} \int_{\Lambda/b < |q| < \Lambda} \frac{d^d q}{q^2 + t\Lambda^2} = \frac{S_d \Lambda^{2-d}}{(2\pi)^d} \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{q^{d-1} dq}{q^2 + t\Lambda^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J &= \Lambda^{4-d} V \sum_{\Lambda/b < |q, q'| < \Lambda} \delta_{q', q+(k_1+k_2)} \langle |\phi_q|^2 |\phi_{q'}|^2 \rangle_0 \\
&= \frac{V^2}{(2\pi)^d} \Lambda^{4-d} \int_{\Lambda/b < |q| < \Lambda} \langle |\phi_q|^2 |\phi_{q-k_1-k_2}|^2 \rangle_0 \\
&= \frac{\Lambda^{4-d}}{(2\pi)^d} \int_{\Lambda/b < |q| < \Lambda} \frac{d^d q}{(q^2 + t\Lambda^2) \{(q - k_1 - k_2)^2 + t\Lambda^2\}} \\
&= \frac{S_d \Lambda^{4-d}}{(2\pi)^d} \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{q^{d-1} dq}{(q^2 + t\Lambda^2) \{(q - k_1 - k_2)^2 + t\Lambda^2\}}
\end{aligned}$$

ここで、 $S_d$  は  $d$  次元単位球の表面積。

これが自明な固定点として  $t^* = u^* = 0$  を持つことはすぐわかる。それ以外の固定点を考える。先に  $u$  の固定点を調べよう。

$$u^* = b^{4-d} u^* \left( 1 - \frac{3}{2} u^* J^* \right) \quad (296)$$

$J$  は  $t$  の関数なので、仮に  $t$  が固定点にあるものとして、\* をつけた。  $J$  は  $k_1 + k_2$  の関数なので波数依存性を持つ。ところが、元の  $u$  は波数に依存しないとしているので、この波数依存性があると  $H'$  は  $H$  と同じ形にならない。

いっぽう、今は  $b$  が 1 に近いとしているので、 $\Lambda/b < |q| < \Lambda$  かつ  $\Lambda/b < |q - k_1 - k_2| < \Lambda$  かつ  $|k_1, k_2| < \Lambda/b$  を満たす  $k_1$  と  $k_2$  の組はほとんど  $k_1 = k_2 = 0$  に限られるだろうと考えて、まずは波数依存性がないものとしよう。つまり

$$J(t, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = J(t, 0) + O(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|/\Lambda) \quad (297)$$

として、第一項のみを考える。

さらに、 $t^*$  と  $u^*$  はともに小さく、同じオーダーであると仮定する ( $t^* \ll 1$  であると仮定して分母を展開する)。これが正しい仮定かどうかは、結果が consistent かどうかで判断すればよい。すると、 $d \neq 4$  のとき

$$\begin{aligned}
J &= \frac{S_d \Lambda^{4-d}}{(2\pi)^d} \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{q^{d-1} dq}{(q^2 + t\Lambda^2)^2} = \frac{S_d \Lambda^{4-d}}{(2\pi)^d} \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} dq (q^{d-5} - 2t\Lambda^2 q^{d-7} + \dots) \\
&= \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{1}{d-4} (1 - b^{4-d}) + O(t^*)
\end{aligned}$$

これより 1-loop 補正の範囲で

$$u^* = b^{4-d} u^* \left\{ 1 - \frac{3}{2} u^* \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{1}{d-4} (1 - b^{4-d}) \right\} \quad (298)$$

$$u^* = b^{d-4} \frac{2(2\pi)^d}{3S_d} (4-d) \quad (299)$$

$d > 4$  では  $u^* < 0$  である。  $u > 0$  でなければ、自由エネルギーが病的になるから、 $d > 4$  ではこの固定点は物理的意味を持たない。いっぽう、 $d < 4$  では  $u^* > 0$  となる非自明な固定点があるが、たとえば  $d = 3$  としてみると

$$u^* = \frac{4\pi^2}{3b} \quad (300)$$

このとき  $u^*$  は  $O(1)$  の量となり、摂動展開と consistent でない。

### 6.9.1 $\varepsilon$ 展開

摂動展開と consistent であるためには  $u^* \ll 1$  であるべきで

$$b^{d-4} \frac{2(2\pi)^d}{3S_d} (4-d) \ll 1 \quad (301)$$

しかし

$$b^{d-4} \frac{2(2\pi)^d}{3S_d} \sim O(1) \quad (302)$$

だから、結局

$$\varepsilon \equiv 4-d \ll 1 \quad (303)$$

つまり、空間次元が 4 に近いときには、摂動展開と consistent な固定点が (少なくとも、 $u$  に関しては) 存在する。そこで、たとえば 3.99 次元というものがどういう物理的意味を持つのかはさておいて、空間次元が 4 に近いとして  $\varepsilon \ll 1$  を小さい展開パラメータと考えるのが、Wilson と Fisher の  $\varepsilon$  展開である。

このとき

$$u^* = O(\varepsilon) \quad (304)$$

だから、 $O(\varepsilon)$  まででは  $u^*$  中の  $d$  を 4 としてよく

$$u^* = \frac{2(2\pi)^4}{3S_4} \varepsilon = \frac{16\pi^2}{3} \varepsilon \quad (305)$$

となる。以下では  $\varepsilon$  と  $u$  は同じオーダーの小さい量と仮定して、 $\varepsilon$  による展開を行う。

次に、同じ近似で  $t^*$  を求める

$$I^* = \frac{S_d \Lambda^{2-d}}{(2\pi)^d} \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{q^{d-1} dq}{q^2 + t^* \Lambda^2} \simeq \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{1}{d-2} (1 - b^{2-d}) + O(t^*) \quad (306)$$

$$t^* = b^2 \left( t^* + \frac{1}{2} u^* I^* \right) = b^2 \left( t^* + \frac{1}{6} (1 - b^{-2}) \varepsilon \right) \quad (307)$$

$$t^* = -\frac{1}{6} \varepsilon \quad (308)$$

たしかに、この近似の範囲で  $t^*$  は  $O(\varepsilon)$  の小さい量となり、consistent である。

結局、 $O(\varepsilon)$  では非自明 (ガウス模型にはない) で摂動展開と consistent な固定点が存在し

$$(t^*, u^*) = \left( -\frac{1}{6} \varepsilon, \frac{16\pi^2}{3} \varepsilon \right) \quad (309)$$

である。これは Wilson-Fisher (WF) 固定点と呼ばれる。 $t^* < 0$  は揺らぎによって臨界温度が下がることを意味する。この固定点はスケールの変換率  $b$  に依存しない。

### 6.9.2 RG flow

RG がすべての  $t > 0$  に対して求められたガウス模型の場合と違い、1-loop で得られた RG

$$t' = b^2 \left( t + \frac{1}{2} u I \right) \quad (310)$$

$$u' = b^\varepsilon u \left( 1 - \frac{3}{2} u J \right) \quad (311)$$

は、 $u$  が小さい領域でしか成り立たない。ガウス固定点も WF 固定点 ( $O(\varepsilon)$  で) も固定点付近ではこの RG が成り立つから、これに基づいて固定点近くでの振舞いを調べよう。 $(t, u)$  が固定点  $(t^*, u^*)$  に近いとして、RG を固定点まわりで線形化すると

$$\Delta t' = \left( \Delta t \frac{\partial}{\partial t} + \Delta u \frac{\partial}{\partial u} \right) b^2 \left( t + \frac{1}{2} u I(t) \right) \quad (312)$$

$$= b^2 \left( 1 + \frac{1}{2} u^* \frac{\partial}{\partial t} I(t)|_{t^*} \right) \Delta t + b^2 \frac{1}{2} I(t^*) \Delta u \quad (313)$$

$$\Delta u' = \left( \Delta t \frac{\partial}{\partial t} + \Delta u \frac{\partial}{\partial u} \right) b^\varepsilon u \left( 1 - \frac{3}{2} u J(t) \right) \quad (314)$$

$$= b^\varepsilon (1 - 3u^* J(0)) \Delta u \quad (315)$$

ただし、

$$I(t) = \frac{S_d \Lambda^{2-d}}{(2\pi)^d} \left( \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} q^{d-3} dq - t \Lambda^2 \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} q^{d-5} dq + t^2 \Lambda^4 \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} q^{d-7} dq + \dots \right) \quad (316)$$

$$J(t) = \frac{S_d \Lambda^{4-d}}{(2\pi)^d} \left( \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} q^{d-5} dq - 2t \Lambda^2 \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} q^{d-7} dq + \dots \right) \quad (317)$$

### 6.9.3 ガウス固定点付近での線形化 RG

まず、ガウス固定点  $(t^*, u^*) = (0, 0)$  からの flow を議論する。線形化された RG を

$$t' = At + Bu \quad (318)$$

$$u' = Cu \quad (319)$$

と書こう (固定点が  $t = u = 0$  なので、 $\Delta$  は省いた)。 $A$  と  $C$  は第一項だけが残るので

$$A = b^2, C = b^\varepsilon \quad (320)$$

である。 $B$  は

$$B = \frac{1}{2} b^2 I(0) = \frac{b^2 S_d \Lambda^{2-d}}{2(2\pi)^d} \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} q^{d-3} dq = \frac{b^2 S_d}{2(2\pi)^d} \frac{1 - b^{\varepsilon-2}}{2 - \varepsilon} \quad (321)$$

ここで、 $d$  次元球の表面積は

$$S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \quad (322)$$

なので、 $d = 4$  の近くでは

$$\frac{S_d}{(2\pi)^d} \simeq \frac{S_4}{(2\pi)^4} (1 + O(\varepsilon)) = \frac{1}{8\pi^2} (1 + O(\varepsilon)) \quad (323)$$

と書ける。<sup>13</sup> これより

$$B = \frac{b^2 - b^\varepsilon}{32\pi^2} (1 + O(\varepsilon)) \quad (324)$$

である ( $b^\varepsilon$  は便宜上、そのまま残した)。

RG をいきなり微分形で書くことにしよう。

$$\begin{pmatrix} t' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \quad (325)$$

<sup>13</sup> $O(\varepsilon)$  の項は、 $\Gamma$  関数のテーラー展開  $\Gamma(1-x) \simeq 1 + \gamma x$  を使えば計算できるが、今は具体形は必要ない

なので、ふたたび  $b = e^l$  と置いて

$$\begin{pmatrix} \frac{t'-t}{l} \\ \frac{u'-u}{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A-1}{l} & \frac{B}{l} \\ 0 & \frac{C-1}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \quad (326)$$

$A, B, C$  を代入して極限  $\lim_{l \rightarrow 0}$  とすれば

$$\begin{pmatrix} \frac{dt}{dl} \\ \frac{du}{dl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2-\varepsilon}{32\pi^2}(1+O(\varepsilon)) \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \quad (327)$$

を得る。

と書ける。行列  $M$  の固有値は  $2$  と  $\varepsilon$  である。対応する右固有ベクトルはそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{32\pi^2}(1+O(\varepsilon)) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (328)$$

である。

$$P \equiv \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{32\pi^2}(1+O(\varepsilon)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{32\pi^2}(1+O(\varepsilon)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (329)$$

とすれば

$$P^{-1} \begin{pmatrix} \frac{dt}{dl} \\ \frac{du}{dl} \end{pmatrix} = P^{-1} M P P^{-1} \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \quad (330)$$

と線形化された微分形の RG が対角化できる。ここで

$$P^{-1} \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \left(\frac{1}{32\pi^2}(1+O(\varepsilon))\right)u \\ u \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \quad (331)$$

とおけば、線形化された RG は

$$\frac{dv}{dl} = 2v \quad (332)$$

$$\frac{du}{dl} = \varepsilon u \quad (333)$$

となる。したがって、 $\varepsilon > 0$  でこの固定点は  $v, u$  どちらのパラメータに対しても不安定であることがわかる。

$u = 0$  は  $(t, u)$  平面の  $t$  座標軸である。このとき、 $v = t$  なので

$$\frac{dt}{dl} = 2t \quad (334)$$

いっぽう、 $v = 0$  は  $(t, u)$  平面上で斜めの直線であり、この線上では

$$t = -\left(\frac{1}{32\pi^2}(1+O(\varepsilon))\right)u \simeq -\frac{1}{32\pi^2}u \quad (335)$$

の比例関係が成立する。ただし、右辺は  $u$  が  $O(\varepsilon)$  なので、 $O(\varepsilon^2)$  の項を落とした。つまり、この線上では

$$\frac{dt}{dl} = \varepsilon t, \frac{du}{dl} = \varepsilon u \quad (336)$$

である。したがって、この二つの線上の点は、RG 変換によってこれらの線に沿ってガウス固定点から離れてゆく。

ここで  $v = 0$  の線上で  $t = -\frac{1}{6}\varepsilon$  と置いてみると

$$u = \frac{16\pi^2}{3}\varepsilon \quad (337)$$

なので、 $O(\varepsilon)$  までで、 $v = 0$  の線は WF 固定点を通ることがわかる。つまり、この線上の点は RG によって WF 固定点に近づく。

#### 6.9.4 Wilson-Fisher 固定点付近での線形化 RG

同様に WF 固定点の近くでの RG を考えよう。線形化された RG をふたたび

$$\Delta t' = A\Delta t + B\Delta u \quad (338)$$

$$\Delta u' = C\Delta u \quad (339)$$

と書いて、各項を求める。

$A$  の第二項は  $O(\varepsilon)$  である  $u^*$  が掛かっているの、積分はすべて  $d = 4$  として計算すればよい。<sup>14</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t} I(t)|_{t^*} = \frac{S_4}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{dq}{q} = \frac{1}{8\pi^2} \log b \quad (340)$$

したがって

$$A = b^2 \left( 1 - \frac{1}{2} u^* \frac{1}{8\pi^2} \log b \right) = b^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{3} \log b \right) = b^{2-\frac{1}{3}\varepsilon} \quad (341)$$

また、 $C$  の第二項もほとんど同じ計算でよく

$$C = b^\varepsilon (1 - 2\varepsilon \log b) = b^{-\varepsilon} \quad (342)$$

いっぽう、 $B$  は  $O(\varepsilon^0)$  までならガウス固定点と同じになるが、 $O(\varepsilon)$  まで求めるのはいささか厄介である。臨界指数を決めるには影響しないので、ガウス固定点と同じと置いておこう。すると、線形化された RG の微分形は

$$\begin{pmatrix} \frac{d\Delta t}{dl} \\ \frac{d\Delta u}{dl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{3}\varepsilon & \frac{1}{16\pi^2} + O(\varepsilon) \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta u \end{pmatrix} = M' \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta u \end{pmatrix} \quad (343)$$

となる。

行列  $M'$  の固有値は  $2 - \frac{1}{3}\varepsilon$  と  $-\varepsilon$ 、対応する右固有ベクトルはそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{16\pi^2} + O(\varepsilon) \\ -2 - \frac{2}{3}\varepsilon \end{pmatrix} \quad (344)$$

である。

上と同様に対角化すると

$$\frac{d\Delta v}{dl} = \left( 2 - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \Delta v \quad (345)$$

$$\frac{d\Delta u}{dl} = -\varepsilon \Delta u \quad (346)$$

ただし

$$\Delta v = \Delta t + \left( \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{2 - \frac{2}{3}\varepsilon} + O(\varepsilon) \right) \Delta u \quad (347)$$

これより、ガウス固定点と違い、WF 固定点付近では RG に対して安定な方向と不安定な方向があることがわかる。ふたたび  $\Delta u = 0$  の線上では

$$\frac{d\Delta t}{dl} = \left( 2 - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \Delta t \quad (348)$$

<sup>14</sup> $d < 4$  として  $\varepsilon$  を残したまま計算しても、実は  $u^*$  から出てくる  $\varepsilon$  と積分から出てくる  $\frac{1}{\varepsilon}$  が打ち消して、同じ結果が得られる

したがって、この線上では RG によって  $t$  軸に平行に WF 固定点から離れる。つまり、 $t$  軸に平行な方向が RG の不安定方向である。いっぽう、 $\Delta v = 0$  の線上では  $u$  と  $t$  が比例するので

$$\frac{d\Delta t}{dt} = -\varepsilon\Delta t, \quad \frac{d\Delta u}{dt} = -\varepsilon\Delta u \quad (349)$$

となり、RG によってこの線に沿って WF 固定点に近づく。つまり、 $\Delta v = 0$  に沿った方向が RG の安定方向である。 $v = 0$  の線上で  $\Delta t = \frac{1}{6}\varepsilon$  を代入してみると  $O(\varepsilon)$  までで  $\Delta u = -\frac{16\pi^2}{3}\varepsilon$  となり、たしかにガウス固定点をこの線上に含む。つまり、ガウス固定点から WF 固定点への流れが存在する。

## 6.10 普遍性と臨界指数

結局、 $d < 4$  でガウス固定点是不安定であり、ガウス固定点の近くから RG を繰り返すと、WF 固定点に近づく。ガウス固定点と WF 固定点を結ぶ線上の点はすべて RG によって WF 固定点に到達する。この線を (ガウス固定点と反対側から WF 固定点に近づくものも含めて) 臨界線 (critical line) と呼ぶ。その理由は以下である。臨界線のごく近くから出発して RG を繰り返そう。すると、いったんは WF 固定点に近づくが、やがて  $t$  軸に平行方向に WF 固定点から離れていこう。不安定な固定点からの離れ方が臨界現象を記述するのだったから、このとき WF 固定点からの離れ方が臨界現象を記述すると考えられる。つまり、臨界線の近くのあらゆる点は、WF 固定点で決まる共通の臨界現象を示すわけである。モデルのパラメーターが違っていても臨界現象は ( $u = 0$  でないかぎり) WF 固定点というひとつの固定点で決まる。これを臨界現象の普遍性 (universality) という。

WF 固定点で決まる臨界現象を調べよう。考え方はガウスモデルで行なったことと同じである。WF 固定点を臨界点として、改めて  $\Delta t$  を  $t$  と書くことにすると、WF 固定点からの不安定方向では

$$t(l) = e^{(2-\frac{1}{3}\varepsilon)l}t_0 \quad (350)$$

だから、初期値  $t_0$  をあらためて  $t$  と書くと、相関距離のスケーリング関係は

$$\xi(t) = e^l \xi(e^{(2-\frac{1}{3}\varepsilon)l}t) \quad (351)$$

これより

$$\xi(t) \propto t^{-\frac{1}{2-\frac{1}{3}\varepsilon}} \quad (352)$$

臨界指数  $\nu$  として

$$\nu = \frac{1}{2-\frac{1}{3}\varepsilon} \simeq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{6}\varepsilon\right) \quad (353)$$

が得られる。これは平均場近似 (あるいはランダウ理論) とは違う非自明な臨界指数となっている。試みに  $\varepsilon = 1$  を代入してみると  $\nu \simeq 0.58$  となり、少なくとも平均場の結果よりは正しい値に近づいている。

いっぽう、相関関数のスケーリングはガウスモデルの場合と同じなので、 $O(\varepsilon)$  では  $\eta = 0$  である。 $\eta$  は  $O(\varepsilon^2)$  ではじめて値を持つことがわかっている。