力学 1 演義 (スタンダードクラス) 第 9 回　2006.6.16

1. (単振り子の運動) 単振り子 (支点と質点の間は、糸ではなく、たるまない棒で結ばれ、支点は自由に回転できる) を考える

   (a) 最下点からの角度 θ を変数とし、また最大の振れ角を θ_m として (当然 $\theta_m \leq \pi$)、エネルギー保存の式を書け。

   (b) エネルギー保存の式より、速度を角度の関数として求めよ。符号に関して、場合分けが必要。$\theta_m = \pi/2$(水平まで振れる) の場合について、角度と速度の関係を図示せよ。角度の取りうる範囲に注意

   (c) 質点が最上点 ($\theta = \pi$) まで到達できる最小のエネルギーを持つとき、最上点に到達するには無限の時間を要することを示したい。簡単のため、質点が $\theta = \pi$ のごく近くにいるとして、運動を調べよう。

      i. 前問で求めた 角度と速度の関係式で、$\theta_m = \pi$ とする。質点の角度を $\theta = \pi + \phi$ とし、$\phi \ll 1$ として展開することにより、$\dot{\phi}$ と ϕ の関係を表す微分方程式を導け。$\phi < 0$ の側から $\phi = 0$(即ち $\theta = \pi$) に近づく場合を考えているので、符号はそれに合わせて決めること

      ii. 時刻 $t = 0$ で質点の角度は $\phi(0) = \phi_0$ であるとし、上で得た微分方程式を解くことにより、これが角度 ϕ まで運動するのに要する時間 $t(\phi)$ を求めよ。当然、$\phi_0 < \phi < 0$ である。実はこの問題は ϕ が小さいとして展開しなくても厳密に解が求まるので、それでもよい

      iii. 上の結果より、ϕ を横軸として $t(\phi)$ を図示せよ。これより、最上点 ($\phi = 0$) に到達するには無限の時間がかかることを確かめよ。