力学 1 演義 (スタンダードクラス) 第 7 回　2006.6.2

1. 前回の残り

2. (減衰振動) 前回に引き続き、変位に比例する復元力と粘性抵抗のもとでの質点の運動を調べる。減衰力が弱く、特性方程式が複素解となる場合 (減衰振動) について

   (a) $x(t)$ の一般解と $v(t)$ の表式を求めよ

   (b) 一般解に表れる未知定数を初期位置と初速度 $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ を用いて表せ (x_0,v_0 は任意なので、これらを代入しても一般解である)。

   (c) 初期条件が $x(0) = x_0$, $v(0) = 0$ であるとき、運動開始直後は $x(t)$ が時間の二次関数で表されることを示せ

3. (線積分) 質点が $\boldsymbol{r}_0$ から $\boldsymbol{r}_1$ まで運動するあいだに力 $\boldsymbol{F}$ がする仕事は線積分によって $W = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ と表される。これを実際に計算するには、1 変数の積分にする。積分変数は経路上の点を特定できるものであればよく、最も一般的には、経路に沿って出発点から測った「距離」s を変数に選んで

$$\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{s_1} \boldsymbol{F}(s)\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right) ds$$

とする。これを実行するのも大変な場合が多く、実際にはさらに s と 1 対 1 に対応する変数 (仮に x とする) をうまく選んで、

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right) ds = \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dx}\right) dx = \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dx}\right) dx$$

により、x に関する積分として計算する。

ここでは、ボール投げについて、力がした仕事を求める。初速度を $\boldsymbol{v}_0 = (v_{x0}, 0, v_{z0})$ とする。初期位置 $\boldsymbol{r}(0) = (0,0,0)$ から、$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), 0, z(t))$ まで運動するあいだに重力がした仕事を２通りの方法で計算する。空気抵抗は考えない。

   (a) 運動のあいだに力 $\boldsymbol{F}$ がした仕事 W は線積分によって表される。これを時間についての積分になおすと

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)dt$$

   運動方程式から $\boldsymbol{v}(t)$ を求め、時間積分を実行して仕事を求めよ。

   (b) 今の場合、横方向の位置 x によって運動経路上の位置は一意に指定できる。$d\boldsymbol{r} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dx}dx$ なので

$$W = \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{F}(x)\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dx}dx$$

   と書けるはずである。運動の軌跡から $\frac{d\boldsymbol{r}}{dx}$ を導き、この積分を実行して仕事を求めよ。