力学 1 演義 (スタンダードクラス) 第 6 回　2006.5.26

1. 前回の残り

2. (単振り子の運動方程式) 質量 m の質点が長さ l の糸で支点から吊された「単振り子」を考えよう。鉛直からの振れ角 θ を変数とする運動方程式を導出したい。導出の道筋は何通りかあるが、もっとも素直な考え方は、まず x, y 座標で表してから、角度変数に直すことだろう。振り子の支点を座標原点として、横方向を x, 縦方向を y とする。y のどちらを正にとってもよいが、途中でわからなくならないように注意。なお、**振幅は必ずしも小さいとは限らない**。

   (a) 振れ角が θ のとき、質点に作用する力を図示せよ

   (b) これを用いて、x と y それぞれについての運動方程式を導出せよ。ただし、この時点では糸の長さ l が一定という条件を無視しておく

   (c) x と y を l と θ で表し、それを使って $\frac{d^2x}{dt^2}$ および $\frac{d^2y}{dt^2}$ を $\frac{d\theta}{dt}$ と $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ で表せ。ただし、この段階で l が一定という条件を使う。すなわち、$\frac{dl}{dt} = 0$

   (d) 上の結果をそれぞれの運動方程式に代入し、$\frac{d\theta}{dt}$ を消去して、単振り子の運動方程式を求めよ。この運動方程式は振れ角の大きさに関わらすに成り立つ一般的なものであることに注意。

   (e) 振れ角が充分に小さいときは、sin を角度でテーラー展開した第一項のみ残すことにより、運動方程式が「単振動」と同じ形になることを示せ。運動方程式の形から、周期が振幅に依存せず、振り子の長さだけで決まること (振り子の等時性) を説明せよ。また、地球上と月の上とでは同じ振り子の周期が何倍違うかを次元解析によって求めよ

   (f) 振り子の等時性は振れ角が小さい時のみ成り立つ性質である。$\sin\theta$ を θ について第 2 項まで展開した運動方程式を書き、それを基に等時性が厳密には成立しないことを説明せよ。また、等時性が成立するとみなせるためには最大振幅がどのような範囲にあればよいかを議論せよ

3. (過減衰) 変位に比例する復元力と粘性抵抗のもとでの質点の運動を調べる。運動方程式は定数係数の線形微分方程式なので特性方程式の方法で解ける。減衰力が強く、特性方程式の解が実数になる場合 (過減衰) について

   (a) $x(t)$ の一般解と $v(t)$ の表式を求めよ

   (b) 解はふたつの減衰モードの線形結合となる。それぞれのモードの特性時間を単振動 (抵抗なしの場合) の角振動数 ω_0 と粘性抵抗による減衰の特性時間 τ の積 $\omega_0\tau$ に対してプロットせよ

   (c) 一般解に表れる未知定数を初期位置と初速度 $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ を用いて表せ。