力学 1 演義 (スタンダードクラス) 第 4 回　2006.5.12

1. (a) 質点に慣性抵抗 (速度の二乗に比例する抵抗力) だけがはたらくとき、時間変数を定数倍しても (時間の単位を変えることを意味する) 運動方程式は不変であることを確かめよ。

   (b) 慣性抵抗と重力のもとでの落下運動を表す運動方程式を無次元化せよ。

2. (a) 雨滴にはたらく空気抵抗は慣性抵抗と仮定できる。その終端速度がどの程度になるかを計算せよ。半径 a の球体が受ける慣性抵抗力の大きさは $f = \frac{1}{4}\pi\rho a^2 v^2$ と表わされる。ρ は空気の密度である。雨滴の半径は 1mm 程度と考えてよい。

   (b) 空気抵抗が粘性抵抗とみなせるためには、抵抗をうける物体の半径はどの程度以下でなくてはならないか。

3. 一階線形非斉次常微分方程式 (1st-order inhomogeneous linear ordinary differential equation) の一般的な解法として「定数変化法」がある。この方法を用いて、粘性抵抗中の質点に周期的な力が働く場合の運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} + \gamma v = F\cos\omega t$$

の一般解 (初期条件を代入する前の解) を求めてみよう。斉次方程式 ($F = 0$ としたもの。homogeneous equation) の解は当然分かっていて

$$v(t) = Ce^{-t/\tau}$$

である ($\tau = m/\gamma$ は斉次方程式の characteristic time scale)。そこで、非斉次方程式の解として、この C が定数でなく t の関数 $C(t)$ であるとしたもの

$$v(t) = C(t)e^{-t/\tau}$$

を仮定するのが定数変化法である。この解を元の方程式に代入すれば、$C(t)$ についての微分方程式が得られるので、それを解いて $C(t)$ の関数形を求める。

   (a) 速度の一般解を求めよ。なお、cos はオイラーの公式を用いて指数関数で表すほうが途中の計算が易しい。

   (b) 初期条件を $v(0) = 0,\ x(0) = 0$ として、$x(t)$ を求めよ。充分短時間 ($t/\tau \ll 1$ かつ $\omega t \ll 1$) での $x(t)$ の振る舞いを求めよ。

   (c) 問題の運動方程式は、τ のほかに時間の次元を持つもうひとつの定数 $1/\omega$ を含む。つまり、この問題には characteristic time scale が二個ある。このような場合、「時間スケールの競合 (competition)」が起き、「時間スケールの比」$R = \omega\tau$ によって運動のようすが変化する。充分長時間後 ($t/\tau \gg 1$) の振動の位相 (phase) を R の関数として求め、だいたいのようすを図示せよ (位相 vs. R のグラフ)

4. 時間が余ったら、前回の残り