

力学 1 演義 (スタンダードクラス) 第 3 回 2006.4.28

1. 重力と速度に比例する抵抗力 (粘性抵抗) のもとで水平方向に投げた質点の軌跡 (trajectory) を求めたい
 - (a) 横方向の運動を表す運動方程式を作り、位置を時間の関数として求めよ (まず、速度を求め、それから位置を求める)。また、横方向の最大到達距離を求めよ。
 - (b) 縦方向の運動を表す運動方程式を作り、位置を時間の関数として求めよ。この場合も速度を表す運動方程式は変数分離型なので、簡単に解ける。
 - (c) これらより時間を消去して、質点の軌跡を求め、そのグラフを描け。グラフの軸は無次元量になるように工夫すること。粘性抵抗がはたらかない場合の軌跡と比較せよ。
2. 雨滴にはたらく空気抵抗が粘性抵抗だと仮定すると、その終端速度はどの程度になるかを計算せよ。いったいそれは現実的な値だろうか。また、終端速度に達したとみなしてよいのは落下開始からだいたい何秒程度経った頃と考えられるか。なお、半径 a の球体が受ける粘性抵抗力は $f = 6\pi a\eta v$ と表わされることが知られている。 η は粘性係数で、空気の場合は $1.8 \times 10^{-5} [\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}]$ 程度である。また、雨滴の半径は 1mm 程度と考えてよい。水の密度は (常識として知っていると思うが)、約 1g/cm^3 である。
3. 空気抵抗は粘性抵抗ではなく、速度の二乗に比例する抵抗力 (慣性抵抗) とみなすほうが現実的である。
 - (a) 慣性抵抗のみがはたらく (重力は考えなくてよい) ときの一次元運動を表わす運動方程式を速度に関する微分方程式として書け。
 - (b) 以下では $v > 0$ の場合だけを考える。この場合も運動方程式は変数分離型なので簡単に解ける。初期条件を $t = 0$ で $v(0) = v_0$ として、解を求め、グラフを示せ。グラフの軸は無次元量になるように工夫すること。
 - (c) さらに $t = 0$ での位置を $x(0) = 0$ として、 $x(t)$ を求め、概略を図示せよ。 $x(t)$ の最大到達距離は粘性抵抗の場合とどう違うか
4. (時間があまったら、以下の問題もやってみること) 重力と粘性抵抗のもとで落下する質点の運動方程式を「級数解」の方法で解いてみよう。この方法は特に「線形」の微分方程式を解く際に有効なものである (線形性については授業で改めて説明する)。以下では、垂直方向の一次元運動として考える

- (a) 速度 $v(t)$ を時刻 $t = 0$ のまわりでテーラー展開できるとして

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \frac{t^n}{n!}$$

と無限級数の形に書こう。これを運動方程式に代入して、各 t^n の係数を比較することにより、係数 v_n の漸化式を導け。(本当は、次元を持つ量で展開するのはあまりよくない。無次元量で展開すれば、すべての v_n は速度の次元を持つ。その方針で計算すると、なおよい)

- (b) 漸化式を解いて、一般の v_n の表式を求めよ
- (c) v_n を級数に代入せよ。この無限級数はよく知られた関数を表わすので、その関数を用いて解を整理せよ。この無限級数は t のどの範囲で収束するか述べよ (証明は不要)