ノート 1: 一次元イジングモデルの実空間繰り込み群

ver.1 1999.11.30
菊池 誠

このメモでは、一次元イジングモデルを実空間繰り込み群で扱う。転送行列を使えば簡単に厳密解が求められるが、敢えてそれを"繰り込み群＋摂動"で扱い、長距離の振舞いに関しては（いくつかの仮定のもとで）厳密な結果が得られることを示す。

1 繰り込み群変換

ハミルトニアン

$$H = -J\sum_{i=0}^{N-1} S_i S_{i+1} = -J\sum_{i:even} S_i(S_{i-1}+S_{i+1})$$

スピン数 N は偶数で、周期境界条件とし、必要に応じて適宜 $N\to\infty$ の極限をとる。分配関数

$$Z = \sum_{\{S\}} e^{K\sum S_i S_{i+1}} = \sum_{S_0=\pm1}\sum_{S_1=\pm1}\cdots\sum_{S_{N-1}=\pm1}\left(\prod_{i:even} e^{KS_i(S_{i-1}+S_{i+1})}\right)$$

ただし、$K=J/T$ は J の単位ではかった逆温度。奇数スピンの状態についての和を先に実行すると

$$Z = \sum_{S_0=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\cdots\sum_{S_{N-2}=\pm1}\left(2^{N/2}\prod_{i:odd}\cosh K(S_i+S_{i+2})\right)$$

ここで、

$$\cosh K(S_i+S_j) = e^{K'S_iS_j+L'}$$

を満たす K', L' の組を求める。$S=\pm1$ なので、両辺が関数として一致することを要求する必要はなく、とりうる S の値について同じ値を与えれば充分。

(S_i, S_j)	$\cosh K(S_i+S_j)$	$e^{K'S_iS_j+L'}$
$(1,1)$	$\cosh 2K$	$e^{K'+L'}$
$(1,-1)$	1	$e^{-K'+L'}$
$(-1,1)$	1	$e^{-K'+L'}$
$(-1,-1)$	$\cosh 2K$	$e^{K'+L'}$

したがって

$$K' = L' = \frac{1}{2}\ln\cosh 2K$$

さらに $i\to i/2$ と番号をつけかえると

$$Z = \left(2e^{L'}\right)^{N/2}\sum_{S_0=\pm1}\sum_{S_1=\pm1}\cdots\sum_{S_{N/2-1}=\pm1}\left(\prod_{i=0}^{N/2-1} e^{KS_iS_{i+1}}\right)$$

これは全体にかかる係数 $\left(2e^{L'}\right)^{N/2}$ を除いて、スピン数 $N/2$ 個の 1 次元イジングモデルの逆温度 K' での分配関数と一致する。全体の係数は自由エネルギーの値に反映するが、熱力学的平均値の計算では分子分母で打ち消すため影響しない。

上の変換により、スピン数 N で逆温度 K のイジングモデルがスピン数 $N/2$ で逆温度 K' の同じモデルに厳密に変換されたことになる。これをここでは”繰り込み群変換”と呼んでおく。繰り込み群変換を次々に繰り返すことにより、スピン数は

$$N \to \frac{N}{2} \cdots \to \frac{N}{2^n}$$

また、パラメータ K は

$$K \to K' \to K_{(2)} \cdots \to K_{(n)}$$

と変化する。ただし、

$$K_{(n+1)} = \frac{1}{2} \ln \cosh 2K_{(n)}$$

2　パラメータの変換

$$w_{(n)} \equiv \exp(2K_{(n)})$$

を定義すると、変換式は

$$w_{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(w_{(n)} + \frac{1}{w_{(n)}}\right)$$

変換の固定点は

$$w^\star = \frac{1}{2}\left(w^\star + \frac{1}{w^\star}\right)$$

したがって固定点はふたつで

$$w^\star = 1, \frac{1}{w^\star} = 0$$

これは、それぞれ

$$K^\star = 0, \frac{1}{K^\star} = 0$$

つまり、温度無限大と 0 に対応する。明らかに温度無限大は無秩序状態、0 は完全強磁性なので、あらゆる温度の状態は変換を無限回繰り返すことにより、このふたつの状態のいずれかになる。

2.1　$1/w^\star = 0$

固定点近傍で

$$\frac{1}{w_{(n+1)}} = \frac{2}{w_{(n)}}$$

したがって、この固定点は不安定。

2.2　$w^\star = 1$

この場合は

$$K^\star = 0$$

なので、この変換式をこの近傍で展開して

$$K_{(n+1)} = K_{(n)}^2$$

したがって、この固定点は安定固定点であり、温度 0 を除くあらゆる温度の系は温度無限大の無秩序状態に変換されることがわかる。

3　二点相関関数

N スピン系について、S_0 と S_{2^n} の逆温度 K での相関関数を計算する。

$$G(2^n, K, N) = \langle S_0 S_{2^n} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{S\}} S_0 S_{2^n} e^{K \sum S_i S_{i+1}}$$

繰り込み群変換を n 回行なうと、元の系での S_{2^n} は変換された系での S_1 に写る。したがって、求める相関関数を計算するには、変換された系での最近接スピン間の相関関数（つまりエネルギー）を計算すればよい。

$$G(2^n, K, N) = G(1, K_{(n)}, N/2^n)$$

n が充分に大きければ（元の系で充分に離れた二点間の相関を考えれば）、n 回の繰り込み群変換によって充分に高温の系に変換される。したがって、そこでは高温展開が使えるはずである。

最低次の高温展開 ($K_{(n)}$ の一次まで) によって $N/2^n$ スピン系の最近接相関関数を計算すると

$$\begin{aligned}
G(1, K_{(n)}, N/2^n) &= \frac{\sum_{\{S\}} S_0 S_1 e^{K_{(n)} \sum S_i S_{i+1}}}{\sum_{\{S\}} e^{K_{(n)} \sum S_i S_{i+1}}} \\
&\simeq \frac{\sum_{\{S\}} S_0 S_1 \left(1 + K_{(n)} \sum S_i S_{i+1}\right)}{\sum_{\{S\}} \left(1 + K_{(n)} \sum S_i S_{i+1}\right)} \\
&= \frac{K_{(n)} 2^{N/2^n}}{2^{N/2^n}} = K_{(n)}
\end{aligned}$$

従って、繰り込み変換の式を n 回適用して逆温度の変換を行なうことにより、元の系の二点相関関数が計算できる。元の系の温度がどのような値であっても、温度 0 でないかぎり、充分多数回の繰り込み群変換によっていくらでも高温の系にうつせるので、かならず最低次の高温展開が適用できる温度領域に到達させることができる。つまり

繰り込み群変換＋最低次の高温展開

で任意の温度の相関関数が求められる。ただし、そのためには元の系で充分離れた二点を考える必要がある。どの程度長距離なら充分かは温度に依存する。低温ほど多数回の繰り込みが必要なので、それだけ長距離を考えなくてはならない。

4　相関距離

距離が二倍違うふたつの相関関数を考えてみると、充分大きな n に対して

$$\frac{\ln G(2^n, K, N)}{\ln G(2^{n-1}, K, N)} = \frac{\ln K_{(n)}}{\ln K_{(n-1)}} = 2$$

相関関数がなめらかで、この関係が 2^n 以外の距離についても、距離が充分大きいところでなりたつと期待すれば

$$\ln G(2r, K, N) = 2 \ln G(r, K, N)$$

つまり、$\ln G$ は r に比例する (r について周期 2 の振動関数である可能性は考えない)。比例係数を $-1/\xi(K, N)$ とおくと (K_n が充分小さいとしているので $\ln K_n < 0$)

$$\ln G(r, K, N) = -\frac{r}{\xi(K, N)}$$

または

$$G(r,K,N)=e^{-\frac{r}{\xi}}$$

となり、ξ は相関距離。

ふたたび、距離 2^n で考えると

$$\xi(K,N)=-\frac{2^n}{\ln K_{(n)}}$$

相関距離は n によらない定数なので、この式は右辺が $n\to\infty$ で一定値に収束することを主張している。実際、繰り込み変換の式から、n の大きいところで分母は 2^n に比例する。そこで、初期の K から始めて、上の式が収束すまで繰り込み変換を繰り返せば、相関距離が求められる。数値計算でよければ、これは容易に実行でき、実際に収束することを確かめられる。前節での”充分長距離” とは、この式が収束する程度のことであり、逆にこれが収束しなければ、距離が充分でなかったことがわかる。これにより、

繰り込み群＋最低次の高温展開＋数値計算

によって、正しい相関距離が得られることになる。

5　臨界現象

上で得られた式は $1/K=0$ の不安定固定点を除く任意の温度で正しいので、これを使って低温での相関距離の発散を調べることができる。充分低温での繰り込み群変換は

$$w'=\frac{w}{2}$$

そこで、温度 w と $w/2$ のふたつのパラメータの系に対してそれぞれ充分多数回繰り込み群変換を行なうと

$$\xi(w,N)=-\frac{2^n}{\ln K_{(n)}(w)}$$

$$\xi\left(\frac{w}{2},N\right)=-\frac{2^{n'}}{\ln K_{(n')}\left(\frac{w}{2}\right)}$$

w と $w/2$ は一回の繰り込み群変換で結ばれるから、

$$K_{(n)}(w)=K_{(n-1)}\left(\frac{w}{2}\right)$$

そこで $n'=n-1$ と選んで

$$\xi(\frac{w}{2},N)=-\frac{2^{n-1}}{\ln K_{(n)}(w)}$$

これより

$$\xi\left(\frac{w}{2}\right)=\frac{\xi(w)}{2}$$

この同次関係が任意の w と w' についても成りたつと期待すれば、ξ は w に比例する。

$$\xi(w)\propto w=e^{2K}$$

従って、相関距離は温度 0 に向かって指数的に発散することがわかる

6 磁場

under construction

7 自由エネルギーと有限サイズ効果

under construction

8 まとめ

結局、繰り込み群変換によって温度 0 以外の任意の温度の系が安定固定点に近付き、そこでは最低次の摂動展開で物理量を計算できた。この方法により、長距離の振舞いに関する限り、（少なくとも数値的には）厳密な結果が得られる。逆に元の温度がどれほど低温であっても繰り込み群変換によって温度無限大にうつされてしまうので、不安定固定点である温度 0 の近くでの摂動展開（低温展開）では、長距離の振舞を記述できない。秩序状態からの摂動で無秩序状態を記述しようと思えば、無限に高い次数まで必要になるのは、当然といえば当然なのだが、それがなぜ当然なのかを固定点の安定性で説明できるところが繰り込み群のいいところ。結局

繰り込み群変換＋安定固定点まわりでの摂動

が正しい結果を与える一般的処方となる。

9 注意

しかし、ここで行なった一次元イジングモデルの繰り込み群は相当に特殊である。そもそも、繰り込み群変換で完全に元と同じモデルに変換される例がまず珍しい。システムサイズ N が（書いてはみたものの）結果にほとんど現れてこないのも、同じ事情による。また、繰り込まれた系のスピンは元のスピンそのもので、単に”間引かれた”だけである。これは、”スピンの繰り込み”（場の理論で言えば、場の繰り込み）が起きていないことに相当する。大きなスケールで見ても”スピンはやっぱりスピン”というわけだが、これは繰り込み群としてあまり自然ではない。厳密にできる計算ではあるけれど、決して典型的な繰り込み群というわけではない。