級数展開 Tips

物理学では「近似計算」が重要な地位を占める。事実、近似なしに解ける問題は限られており、ほとんどすべての物理の問題は近似なしには扱えない。中でももっともよく使われる近似は級数展開である。

一般に関数は無限級数に展開できるが、その級数を最初の数項で打ち切ったもので、関数を近似する。以下では、$1 \ll x$ として、さまざまな関数を x について展開したときの最初の数項を求める方法を考える。ただし、Taylor 展開についてひと通りの数学的議論 (収束性など) は済ませてきているものとして、証明などはしない。単にちょっと便利な計算法を紹介するだけである。

1　知っているはずのこと

1.1　指数関数と三角関数

指数関数は微分しても不変な関数なので、0 のまわりでの展開は簡単にできる。もっとも指数関数の級数展開くらいは頭にはいっていて当然 (というより、これが指数関数の定義と言ってもよい)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

sin と cos の展開も頭にはいっていて当然

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

ただし、これらは

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

の左辺を展開すれば導出できる。指数関数と三角関数は収束半径が無限大であることも知っていて当然。ただし、以下では級数を最初の数項で打ち切って関数を近似することしか考えないので、収束性はあまり問題にならない。

1.2　$\frac{1}{1+x}$ と $\log(1+x)$

$\frac{1}{1+x}$ の展開は、実は「等比級数の和の公式」そのもので

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

ただし、収束範囲は $|x| < 1$。というわけで、これは頭にはいっていて当然だが、どうしても思い出せないときは、微分しなくても簡単に導出できる。たとえば、x の 3 次まで欲しければ、

$$\frac{1}{1+x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + O(x^4)$$

と置いてみる (展開可能性は認めてしまうので、以下は証明ではない)。両辺に $1+x$ をかけると

$$1 = (1+x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + O(x^4)) = a_0 + (a_1 + a_0)x + (a_2 + a_1)x^2 + (a_3 + a_2)x^3 + O(x^4)$$

左辺は x を含まないので、x の各次の係数がそれぞれ 0 となり

$$a_0 = 1,\ a_1 = -a_0 = -1,\ a_2 = -a_1 = 1,\ a_3 = -a_2 = -1$$

もっとも、これが微分するよりも本当に簡単かどうかは微妙だが、x の多項式が分母にくる場合に広く応用できる方法ではある。

これがわかれば

$$\log(1+x) = \int \frac{1}{1+x} dx$$

より $\log(1+x)$ の展開もわかる。各項を積分して

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

積分定数はどこへいったのかというと、$\log 1 = 0$ より展開の第一項は 0 なので、積分定数は 0 である。

2　べき乗

$$f(x) = (1+x)^n$$

の展開は、Taylor 展開ではなくて普通の二項展開で、一般に

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} x^n$$

である。各項の係数は二項係数とよばれるもので、「パスカルの三角形」を知っていれば階乗の計算すら不要。x の 1 次までなら

$$f(x) = 1 + nx + O(x^2)$$

なので簡単。

一方、n が整数でないときは、無限級数になるが、それでも x の 1 次まででは

$$f(x) = 1 + nx + O(x^2)$$

と同じ形になる。高次までの導出にはいくつか方法があるが、Taylor 展開の公式を使わない場合のもっとも普通のやりかたは

$$\log f(x) = n \log(1+x)$$

として $\log(1+x)$ の展開を使い、結果を指数関数に代入して指数関数の展開を使うことだろう。もっとも、平方根 ($\sqrt{1+x}$) くらいなら、もう少し簡単な方法はある。

$$\sqrt{1+x} = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + O(x^3)$$

と展開形を仮定して、両辺を二乗してしまうのである (当然、これは証明ではない)。すると

$$1 + x = 1 + 2ax + (a^2 + 2b)x^2 + O(x^3)$$

なので、両辺の各次数を比べて

$$2a = 1,\ a^2 + 2b = 0$$

と係数が決まる ($a = 1/2$、$b = -1/8$)。

3　組み合わせ

上でまとめた「知っているはず」の展開式を組み合わせることで、多くの関数が展開できる。このような場合、展開したい関数に含まれるすべての関数を必要な次数まで矛盾なく展開しておくことが大切である

3.1　example 1

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a - bx^2}}$$

を展開する。$1 \ll x$ なので、分母の定数が 1 になるようにして

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b}{a}x^2}}$$

当然、$1 \ll x^2$ だから $1 \ll bx^2/a$ として、平方根を展開すると

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{1 - \frac{b}{2a}x^2 + O(x^4)}$$

さらに分母を $\frac{1}{1+x}$ の展開式を使って展開すると

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(1 + \frac{b}{2a}x^2\right) + O(x^4)$$

となる。もちろん、もっと高次まで必要なら、$\frac{1}{1+x}$ の展開だけでなく平方根の展開の時点から高次まで展開しておかなくてはならない。

3.2　example 2

$$f(x) = e^{-x} \sin(x + \delta)$$

を $x = 0$ のまわりで x の 3 次まで展開しよう。そのためには位相 δ が邪魔なので

$$\sin(x + \delta) = \sin x \cos \delta + \cos x \sin \delta$$

によって位相を分離し、その上で指数関数と三角関数をそれぞれ x の 3 次まで展開する

$$f(x) = \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^4)\right)\left\{\cos\delta\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^4)\right) + \sin\delta\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)\right)\right\}$$

あとはこれを整理して x^3 の項まで残せばよいから

$$f(x) = \sin\delta\left(1 - x + \frac{1}{3}x^3\right) + \cos\delta\left(x + x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) + O(x^4)$$

3.3 example 3

もうひとつの例として $\tanh x$ を x の 3 次まで展開する。

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

なので、上と同様に四つの指数関数をそれぞれ x の 3 次まで展開する。

$$\tanh x = \frac{\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + O(x^4)\right) - \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^4)\right)}{\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + O(x^4)\right) + \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^4)\right)} = \frac{\left(x + \frac{1}{3!}x^3 + O(x^4)\right)}{\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)\right)}$$

さらに分母を $\frac{1}{1+x}$ の展開式を使って展開すると

$$\tanh x = \quad \left(x + \frac{1}{3!}x^3 + O(x^4)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)\right) = x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)$$

tanh を三回微分するよりは簡単だろう。

4 別の点からの展開

$x = x_0$ から展開したい場合も話は簡単で、

$$y = x - x_0$$

と置いて、$y = 0$ のまわりで展開すればよい。あとは同じなので、例はひとつだけ。

$$f(x) = \frac{1}{1 - x}$$

を $x = x_0$ から展開する。上のように y を定義すれば

$$f(x) = \frac{1}{1 - y + x_0} = \frac{1}{1 + x_0}\frac{1}{1 - \frac{1}{1+x_0}y} = \frac{1}{1 + x_0}\left(1 + \frac{1}{1 + x_0}y + O(y^2)\right)$$

5　Laurent 展開

ついでなので、展開の初項が singular な場合もやってみよう。このときは変数を複素数に拡張して複素関数の Laurent 展開と考える。といっても、やることはこれまでと同じである。たとえば

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

の分母を z の 5 次まで展開すると

$$f(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + O(z^7)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 + O(z^6)}$$

第二の等号で singular な部分を分離してしまったので、残りは普通の Taylor 展開と同じである。$\frac{1}{1+z}$ の展開式を使って

$$f(z) = \frac{1}{z}\left\{1 + \left(\frac{1}{3!}z^2 - \frac{1}{5!}z^4 + O(z^6)\right) + \left(\frac{1}{3!}z^2 - \frac{1}{5!}z^4 + O(z^6)\right)^2\right\} = \frac{1}{z}\left\{1 + \frac{1}{3!}z^2 + \left(\frac{1}{3!^2} - \frac{1}{5!}\right)z^4 + O(z^6)\right\}$$

したがって

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + O(z^5)$$

と z^3 までの Laurent 展開が得られた

もうひとつ

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

を展開する。分母を z の 3 次まで展開すると初項の 1 は消えるので

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{3!}z^2 + O(z^3)} = \frac{1}{z}\left\{1 - \frac{1}{2}z + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3!}\right)z^2 + O(z^3)\right\} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}z + O(z^2)$$