1　強制振動

減衰振動は遅かれ早かれいずれ止ってしまうので、止まらないように外から力を加えて揺すってやることを考える。簡単な場合として、外力は振動数 ν の単振動であるとしよう。振り子を周期的に押したり引いたりするような状況と思えばよい。運動方程式は減衰振動の式に外力を加えたものであるから

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - kx + f\cos\nu t$$

外力はもちろん一般に $f\sin(\nu t+\delta)$ の形であればいいわけだが、あとの計算が便利になるように位相を $\delta = \frac{\pi}{2}$ としておいた。

書き直して

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F\cos\nu t$$

ただし、$\Gamma \equiv \gamma/m$、$\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$、$F \equiv f/m$。$\omega_0$ は抵抗力も外力もない場合 $(\gamma = f = 0)$ のの単振動の振動数で、一般には外力の振動数 ν とは違う。外力があっても、この微分方程式は線形である。$F = 0$ の場合は、x とその微分に比例する項しか含まれず、"線形斉次" と呼ばれる[1]。一方、外力は x やその微分には比例しない項なので、これを含む方程式は"線形非斉次" と呼ばれる。

線形非斉次方程式の一般解は、一般に「斉次方程式の一般解 + 非斉次方程式の特解」として求めることができる。上の運動方程式に即して、これを見ておこう。$G(t)$ を斉次方程式 (すなわち、外力を含まない減衰振動の運動方程式) の一般解とする。これは一般解なので、初期条件を自由に設定でき、そのために自由に選べる変数二つを含む。解であるから

$$\ddot{G} + \Gamma\dot{G} + \omega_0^2 G = 0$$

である。一方、$H(t)$ を非斉次方程式 (すなわち外力を含む運動方程式) の解のひとつであるとする。これは"解" でありさえすればなんでもよく、特定の初期条件のもとでの解でかまわない。その意味で"特解" である[2]。特解も解であるからには、運動方程式を満足するので

$$\ddot{H} + \Gamma\dot{H} + \omega_0^2 H = F\cos\nu t$$

がなりたつ。

ここで確かめたいのは、このとき $G+H$ が非斉次方程式の"一般解" になるということである。実際に $G+H$ を運動方程式の左辺に代入してみると

$$\frac{d^2}{dt^2}(G+H) + \Gamma\frac{d}{dt}(G+H) + \omega_0^2(G+H) = (\ddot{G} + \Gamma\dot{G} + \omega_0^2 G) + (\ddot{H} + \Gamma\dot{H} + \omega_0^2 H) = F\cos\nu t$$

となり、確かに方程式の線形性によって $G+H$ は非斉次方程式を満足することがわかる。すなわち、$G+H$ は非斉次方程式の解で、しかも $G+H$ は自由に選べる変数二つを含むので、非斉次方程式の一般解である。

斉次方程式の一般解は既に求めたので、新たにやるべきことは

非斉次方程式の解をどんなものでもいいからひとつ見つける

だけである。これは本当にどんなものでもいいので、夢のお告げや天の声など、どこかから降って沸いたものでも一向にかまわない。解かどうかは微分してみれば確かめられるので、それらしい関数をを次々に試すのでもかまわない。逆に、一般の非斉次方程式に対して特解を発見する決まった手法はない … と思う[3]。

そういうわけなので、じっと考えるわけだ。重要なのはこの方程式があくまでも物理現象を記述しているということだ。天から降ってきた素性の知れない方程式ではない。だから、想像してみるのは重要だ。"粘性抵抗を受ける単振動を外から規則正しく揺する" とどうなるのか。まあ、長いこと揺すっていれば、最後は外力と同じ周期で振動するようになるんじゃないか。というわけで、外力と同じ周期の単振動を解の候補としてみ

[1] 斉次とも同次とも言う。次数が等しいこと。この場合は x,$\dot{x}$, $\ddot{x}$ にそれぞれ比例する (1次) 項しか含まれないことから

[2] $H(t)$ が一般解なら、問題は解けてしまったことになるので、これ以上考える必要はない。

[3] だから"発見" なのだ。強制振動の場合はフーリエ変換するという手順があるのだが、実はそれは"どうせ解は単振動の組み合わせだ" という予測を使っている。以下でやる手順は簡略化してあるだけで、フーリエ変換と本質的に同じ

る。減衰振動の場合は解として指数関数を考えるのが便利だったから、ここでも指数関数で表現することにして、解を

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(A\mathrm{e}^{i\nu t}\right)$$

と仮定する。A, B は複素数とし、Re は複素数の実数部をとる演算。どうせ最後は実数にしなくてはならないので、実数部をとる演算をはじめから含めておく。

外力も同様に指数関数で表現しておくと

$$F\cos\nu t = \mathrm{Re}\left(F\mathrm{e}^{i\nu t}\right)$$

である。

ところで、ここで Re という演算は線形であること、および Re と時間微分が両方作用するときは順序を入れ換えても結果が変わらないことの二点に注意しておく。実際、関数 $g(t)$ がふたつの実数関数 $\alpha(t)$ と $\beta(t)$ によって

$$g(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$$

と表されるとすると

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left(g(t)\right) = \dot{\alpha}(t)$$

また

$$\mathrm{Re}\left(\frac{d}{dt}g(t)\right) = \mathrm{Re}\left(\dot{\alpha}(t) + i\dot{\beta}(t)\right) = \dot{\alpha}(t)$$

なので

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left(g(t)\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{d}{dt}g(t)\right)$$

が成り立つ。

これを考慮すると、仮定した解を運動方程式に代入した結果は

$$\mathrm{Re}\left[\left(-A\nu^2 + iA\nu\Gamma + A\omega_0^2 - F\right)\mathrm{e}^{i\nu t}\right] = 0$$

左辺の実部だけが 0 ならいいわけだが、気にせずに全体を 0 にすることを考えると

$$-A\nu^2 + iA\nu\Gamma + A\omega_0^2 - F = 0$$

ならよい。これを A について解いた

$$A = \frac{F}{\omega_0^2 - \nu^2 + i\nu\Gamma} = F\frac{\omega_0^2 - \nu^2 - i\nu\Gamma}{(\omega_0^2 - \nu^2)^2 + (\nu\Gamma)^2}$$

が、ひとつの解を与える。解はなにかひとつ求まればいいので、これで充分である。これを使って特解は

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(F\frac{\omega_0^2 - \nu^2 - i\nu\Gamma}{(\omega_0^2 - \nu^2)^2 + (\nu\Gamma)^2}(\cos\nu t + i\sin\nu t)\right) = \frac{F}{(\omega_0^2 - \nu^2)^2 + (\nu\Gamma)^2}\left((\omega_0^2 - \nu^2)\cos\nu t + \nu\Gamma\sin\nu t\right)$$

となり、これは単振動である。あるいは、明らかに

$$\frac{|\omega_0^2 - \nu^2|}{\sqrt{(\omega_0^2 - \nu^2)^2 + (\nu\Gamma)^2}} < 1$$

かつ

$$\frac{\nu\Gamma}{\sqrt{(\omega_0^2 - \nu^2)^2 + (\nu\Gamma)^2}} < 1$$

であることを使って

$$x(t) = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \nu^2)^2 + (\nu\Gamma)^2}}\cos(\nu t + \delta)$$

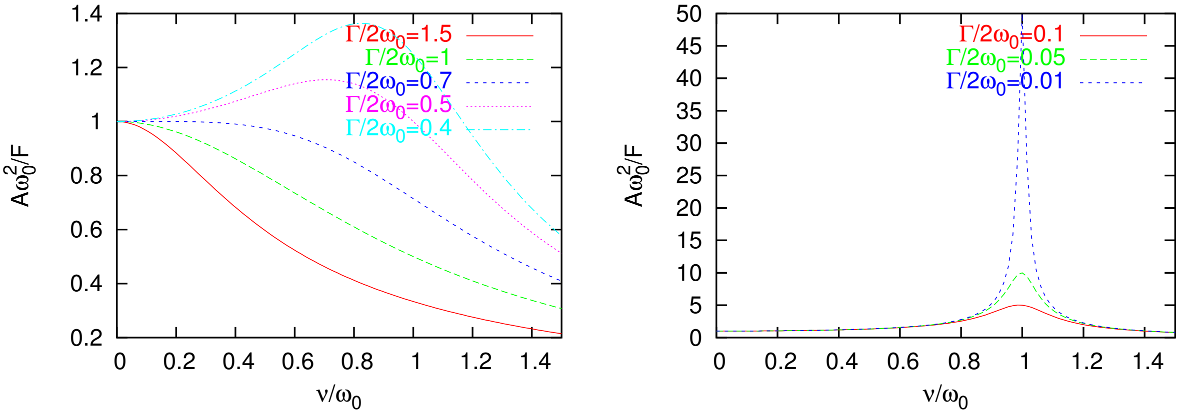

図 1: 図 1：振幅のふるまい (左:$\frac{\Gamma}{2\omega_0}$ が大きめ。右:$\frac{\Gamma}{2\omega_0}$ が小さめ。)s

と書くこともできる。δ は外力からの位相のずれを表し、

$$\tan\delta = \frac{\nu\Gamma}{\nu^2 - \omega_0^2}$$

というわけで、特解がひとつ得られた。この解は外力と同じ振動数をもち、位相が δ だけずれた単振動であり、その振幅は

$$\frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \nu^2)^2 + (\nu\Gamma)^2}}$$

で与えられる。この特解がどういう初期条件に対応しているかを見たければ、$x(0)$ と $v(0)$ を計算してみればよく、それぞれ

$$x(0) = \frac{F(\omega_0^2 - \nu^2)}{(\omega_0^2 - \nu^2)^2 + (\nu\Gamma)^2}$$

$$v(0) = \frac{F\nu^2\Gamma}{(\omega_0^2 - \nu^2)^2 + (\nu\Gamma)^2}$$

となる。要するに、こういう特別な初期条件に設定してやれば、強制振動の解は外力と同じ振動数で位相がずれた単振動になるというわけだ。外力に対して位相がずれるというのは、外力にぴったり追随できずに遅れることを意味する (遅れてはいるけれど、同じ周期でついていく)。

それ以外の初期条件も考えたければ、斉次方程式の一般解を足すことによって、一般解を作ればよい。その場合も斉次方程式の解は時間とともに減衰することがわかっているので、長時間経ったのちに残るのは今得た特解ということになる。[4]

長時間経過後の振動の振幅を外力振動数 ν の関数として議論しよう。分母の平方根の中を ν について平方完成すれば、ν の関数としての振幅 $A(\nu)$ は

$$A(\nu) = \frac{F}{\sqrt{\left(\nu^2 - \omega_0^2 + \frac{\Gamma^2}{2}\right)^2 + \Gamma^2\left(\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}\right)}}$$

となり、これは、$R = \frac{\Gamma}{2\omega_0} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ であれば $\nu = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2/2}$ にピークを持ち[5]、そうでなければ ν について単調減少することが見てとれる。

ν を変化させたときの振幅のふるまいをグラフにしたのが図 1。

$\frac{\Gamma}{2\omega_0}$ が大きくなるにつれて、$\nu \simeq \omega_0$ にするどいピークを持つようになる。つまり、外力の振動数 ν が元々の単振動の振動数 ω_0 に近いところで、振幅は急激に大きくなる。これは”共鳴”である。$\Gamma \to 0$ とすれば、ちょ

[4] 適当に作った解だったはずなのに、実は長時間での振る舞いをきちんと記述していたとは、だまされたみたいだが、要するに解として単振動を仮定するとこの解しか得られないということなのだ。だから、これでいいのだ。

[5] 分母が極小となるところ

うど $\nu=\omega_0$ のところで振幅が発散してしまう。これは外力によって絶えず外から仕事をしているにも関らず抵抗による減衰がないため、運動エネルギーがいくらでも大きくなることを意味している。しかし、いきなり振幅が無限大の振動というものが起きるはずはないので、参考までに振幅がどのように大きくなるかを見ておこう。$\gamma=0$ の場合も特解を求めて、斉次方程式の一般解と足して、という手続きは同じである。解くぶんにはこちらのほうが簡単で、一般解をいきなり書くと

$$A\cos(\omega_0 t+\delta)+\frac{F}{\omega_0^2-\nu^2}\cos\nu t$$

となる。A と δ が初期条件で決まる定数である。これに初期条件として $x(0)=x_0$、$v(0)=v_0$ を代入すれば

$$A\cos\delta=x_0-\frac{F}{\omega_0^2-\nu^2}$$

$$A\sin\delta=-\frac{v_0}{\omega_0}$$

が得られる。めんどうくさいので、$x_0=0$ の場合を考えることにすると、結局この初期条件のもとでの解は

$$\frac{F}{\omega_0^2-\nu^2}(\cos\nu t-\cos\omega_0 t)+\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

となる。ここで、$\nu=\omega_0$ としてしまうと、第一項の分母が 0 になって全体が発散してしまいそうだが、それは早とちり。括弧の中が $\cos\nu t-\cos\omega t$ なので、こちらは 0 になるのだ。このままでは 0/0 になってしまうので、分子と分母の 0 への近づきかたを調べなくてはならない。第一項だけ取り出して、書き直す

$$\frac{F}{\omega_0^2-\nu^2}(\cos\nu t-\cos\omega_0 t)=\frac{F}{\omega_0^2}\frac{1}{1-\left(\frac{\nu}{\omega_0}\right)^2}\left(\cos\left(\frac{\nu}{\omega_0}\right)-\cos\omega t\right)$$

ここで、無次元量 $\frac{\nu}{\omega_0}$ を

$$\frac{\nu}{\omega_0}=1+\Delta$$

とおいて、$|\Delta|\ll 1$ を考える。

$$\frac{1}{1-(1+\Delta)^2}\simeq\frac{1}{1-(1+2\Delta)}=-\frac{1}{2\Delta}$$

また、さらに $|\Delta|\omega_0 t\ll 1$ とすれば[6]

$$\cos(1+\Delta)\omega_0 t-\cos\omega_0 t=\cos\omega_0 t\cos\Delta\omega_0 t-\sin\omega_0 t\sin\Delta\omega_0 t-\cos\omega_0 t\simeq\frac{1}{2}(\Delta\omega_0 t)^2\cos\omega_0 t-\Delta\omega_0 t\sin\omega_0 t$$

第一項はこのふたつの積だから

$$\frac{F}{\omega_0^2-\nu^2}(\cos\nu t-\cos\omega_0 t)\simeq\frac{F}{\omega_0^2}\left[\frac{\omega_0 t}{2}\sin\omega_0 t-\frac{(\omega_0 t)^2}{4}\Delta\cos\omega_0 t\right]$$

ここで $\Delta\to 0$ の極限をとれば、Δ を含まない部分だけが残る。さきほどの第二項と合わせて、結局 $\Delta=0$ つまり $\nu=\omega_0$ での解として

$$\frac{1}{\omega_0}\left(v_0+\frac{F}{2}t\right)\sin\omega_0 t$$

が得られる。つまり、振幅は時間に比例して増大することがわかる。

[6] これは $|\Delta|\omega_0\ll 1/t$ を満足する時刻 (つまり、短時間) でしか成り立たない近似だが、最終的には $\Delta\to 0$ とするので、その後の結果はすべての時刻で成立する。