1　減衰振動

抵抗力のもとでの単振動を考える。ここでは簡単のために速度に比例する抵抗力とする。これはたとえば液体中で単振り子を小さく振るような場合に相当する。運動方程式は

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - kx$$

書き直して

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

ただし、$\Gamma \equiv \gamma/m$ であり、また $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ は抵抗力がない場合 $(\gamma = 0)$ の単振動の振動数である。また、$\Gamma, \omega_0 \geq 0$。この微分方程式は線形であることに注目しておこう。あとで線形性を利用する。

ここで、既に知っている二つの場合を思い出そう。

1. $\gamma = 0$ のとき
   このときは単振動であるから、解は三角関数で表される

2. $k = 0$ のとき
   このときは速度が指数関数的に 0 に近づき、位置も $t \to \infty$ での位置に指数関数的に漸近する

今考えている運動方程式はこのふたつの場合を共に含んだものである。ふたつの解はそれぞれ三角関数と指数関数であるが、ここでオイラーの公式

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

を思い出すなら[1]、関数のとりうる値の範囲を複素数まで広げて考えると三角関数と指数関数には密接な関係があることがわかる。

そこで、解の形として指数関数を仮定しよう。値の範囲も複素数まで広げて考えることにする。もちろん、x には"位置"という物理的な意味があり、これは実数でなくてはならないのだから、最終的な解は実数になるようにする。つまり

> **一旦 $x(t)$ のとりうる値の範囲を複素数に拡張して、指数関数型の解を求め、その中から値が実数になるものを見つける**

という手順で解くことにする。

というわけで

$$x(t) = A\mathrm{e}^{Bt}$$

と置いて、この形の解を探してみる。ただし、A, B は実数とは限らず、複素数でもよいものとする。これを運動方程式に代入すると

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (B^2 + B\Gamma + \omega_0^2)x = 0$$

これを満足する B は

$$B = \frac{1}{2}\left(-\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega_0^2}\right)$$

である。この解は判別式の符号によって三通りに場合分けできる。数学的には判別式の符号だが、それは Γ と ω_0 の大小関係で決まるので、結局、抵抗力による減衰の効果と復元力による振動の効果の大小関係を見ていることになる。

$$R \equiv \frac{\Gamma}{2\omega_0}$$

と置き、$R < 1$、$R > 1$、$R = 1$ のそれぞれの場合を考えていこう。

---

[1] i は虚数単位で、$i^2 = -1$ あるいは $\sqrt{-1} = i$

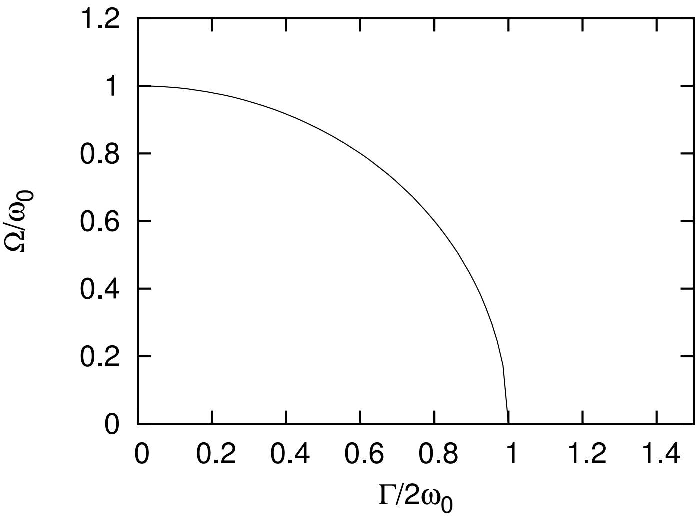

図 1: 抵抗力の大きさと振動数の関係

1. $R < 1$
   この場合は振動の効果が強く、減衰の効果のもとでも振動が生じる。

$$\Omega \equiv \omega_0 \sqrt{1 - R^2}$$

と置けば運動方程式の解は

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-\left(-\frac{\Gamma}{2} \pm i\Omega\right)t}$$

運動方程式が線形なので、このふたつの解 (複号のそれぞれ) を適当な比で足しあわせたものもまた解である。適当な係数 C, D を導入して

$$x(t) = C\mathrm{e}^{-\left(\frac{\Gamma}{2} + i\Omega\right)t} + D\mathrm{e}^{-\left(\frac{\Gamma}{2} - i\Omega\right)t} = \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(C\mathrm{e}^{i\Omega t} + D\mathrm{e}^{-i\Omega t}\right)$$

とすれば、これは自由に決められる定数ふたつ (C, D) を含むので、一般解である。

しかし、本当に必要なのは実数の解であるから、C, D を選んで実数の解を作ることにする。オイラーの公式を思い出せば、$C = D = 1/2$ とすると右辺の括弧の中は cos に、また $C = -D = 1/2i$ ととれば sin になる。さらにそのふたつの適当な足しあわせもまた解であるから、実数の一般解として

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(a \sin \Omega t + b \cos \Omega t\right)$$

あるいは同じことだが

$$x(t) = c\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t} \sin(\Omega t + \delta)$$

が得られる。a, b または c, δ は初期条件を入れると決まる定数である。この解はまさに単振動に減衰効果をかけたものになっている。減衰効果の大きさは Γ だけで決まる (ただし、減衰の率は復元力がない場合の半分である。残りの半分は振動に行ってしまったのだが、それはよく式をにらめば理解できるはず)。振動数は Ω であり、抵抗力が振動部分に及ぼす効果として、ω_0 からずれていることに注目しておこう。抵抗力の大きさと振動数の関係を示したのが図 1 である。

速度は $v(t)$ を微分して

$$v(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left[\left(-\frac{\Gamma}{2}a - \Omega b\right)\sin \Omega t + \left(-\frac{\Gamma}{2}b + \Omega a\right)\cos \Omega t\right]$$

ここで、例として二通りの初期条件を代入してみよう。

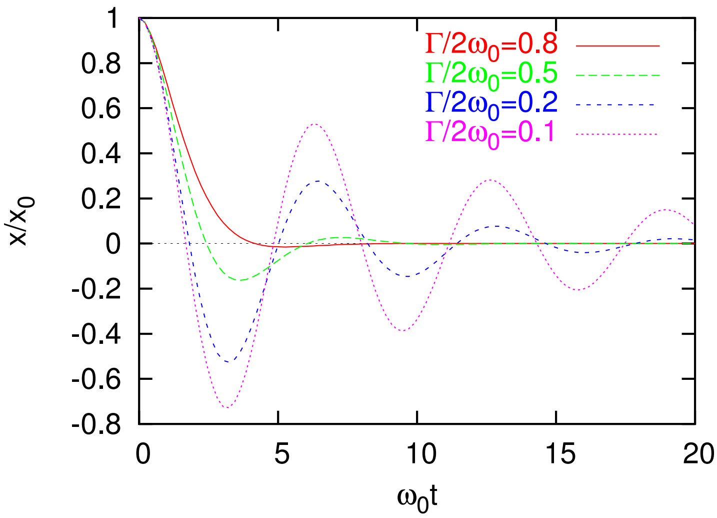

図 2: 減衰振動での位置の時間変化 (初速度 0)

(a) 初速度 0 の場合

$x(0) = x_0, v(0) = 0$ とすれば

$$x(0) = b = x_0$$

$$v(0) = -\frac{\Gamma}{2}b + \Omega a = 0$$

これより、a, b が求められ

$$a = \frac{\Gamma}{2\Omega}x_0$$

これを代入すると、解は

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(\frac{\Gamma}{2\Omega}\sin\Omega t + \cos\Omega t\right)$$

となる。あるいは、$|R| < 1$ かつ $\sqrt{1-R^2} < 1$ であることを使って

$$x(t) = x_0 \frac{1}{\sqrt{1-R^2}} \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t} \sin(\Omega t + \delta)$$

と書くこともできる。ただし

$$\tan\delta = \frac{\sqrt{1-R^2}}{R}$$

である。

いくつかの場合について、ふるまいをグラフにしたのが図 2 である。[2]

速度は

$$v(t) = -\Omega x_0 \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left[1 + \left(\frac{\Gamma}{2\Omega}\right)^2\right]\sin\Omega t$$

同様にグラフにしたのが図 3 である。

(b) 初期位置 0 の場合

$x(0) = 0, v(0) = v_0$ とすれば

$$x(0) = b = 0$$

$$v(0) = -\frac{\Gamma}{2}b + \Omega a = \Omega a = v_0$$

[2]時間を無次元量 $\tau \equiv \omega_0 t$ で表すことにすれば、式の中で Γ と ω_0 は必ず $\frac{\Gamma}{2\omega_0}$ の形すなわち R としてしか顔を出さないので、抵抗力や復元力の違いは R の値だけで表現される。

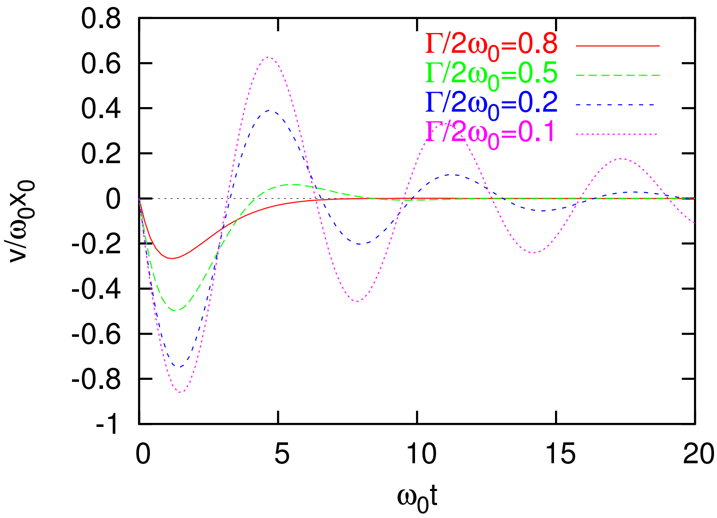

図 3: 減衰振動での速度の時間変化 (初速度 0)

これを代入すると、解は

$$x(t) = \frac{v_0}{\Omega} \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t} \sin \Omega t$$

速度は

$$v(t) = v_0 \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left(\frac{\Gamma}{2\Omega} \sin \Omega t + \cos \Omega t \right)$$

式をよく見ると、初速度 0 の場合の位置と速度を入れ換えたようなものなので[3]、グラフは省略。

2. $R > 1$
復元力に比べて抵抗力が強い場合である。明らかに解は指数型の減衰を示し、振動しない。減衰の効果が強すぎて、振動が起きないことから、”過減衰” と呼ばれる。

この場合は即座に実数解が得られるから簡単で、今度は

$$\Omega \equiv \omega_0 \sqrt{R^2 - 1}$$

とおけば、解は

$$x(t) = A \mathrm{e}^{-\left(-\frac{\Gamma}{2} \pm \Omega\right)t}$$

明らかに

$$\frac{\Gamma}{2} \pm \Omega \geq 0$$

であるから、このふたつの解はどちらも指数関数的な減衰を表す。このふたつの解の適当な足しあわせによって一般解を構成できて、

$$x(t) = C \mathrm{e}^{-\left(\frac{\Gamma}{2} + \Omega\right)t} + D \mathrm{e}^{-\left(\frac{\Gamma}{2} - \Omega\right)t}$$

という形になる。ここでも C, D は初期条件で決まる定数である。

$$\frac{\Gamma}{2} + \Omega > \frac{\Gamma}{2} - \Omega$$

なので、第一項の方が早く減衰する。そのため、長時間の振る舞いを決めるのは減衰の遅い第二項である。[4]速度の式は、これを微分するだけなので

$$v(t) = -C \left(\frac{\Gamma}{2} + \Omega \right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{\Gamma}{2} + \Omega\right)t} - D \left(\frac{\Gamma}{2} - \Omega \right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{\Gamma}{2} - \Omega\right)t}$$

[3] もちろん次元が違うので、全体の係数が違う。また符号も違う
[4] ただし、$D = 0$ の場合はもちろん例外

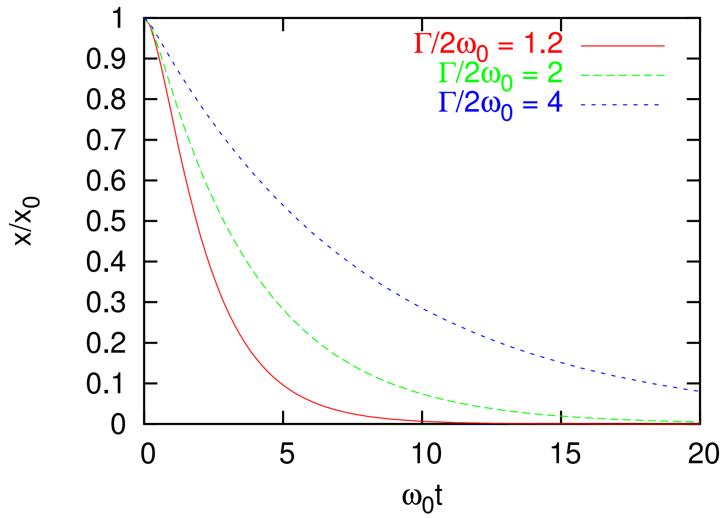

図 4: 過減衰での位置の時間変化 (初速度 0)

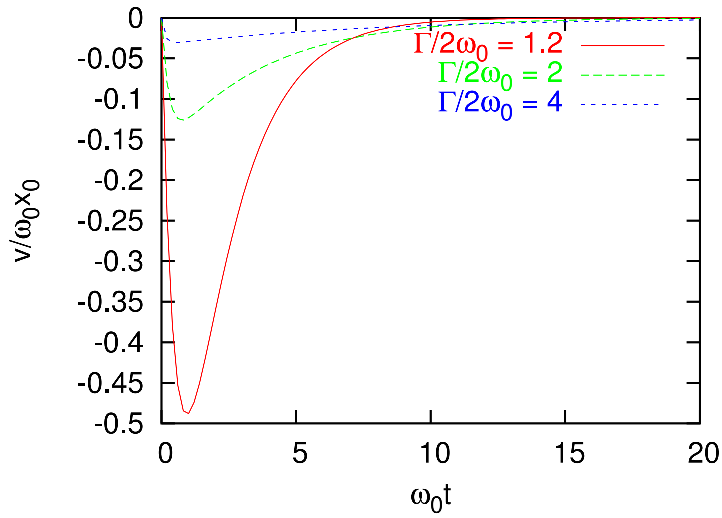

図 5: 過減衰での速度の時間変化 (初速度 0)

これもまた、二通りの初期条件を代入してみよう。

(a) 初速度 0 の場合
$x(0) = x_0, v(0) = 0$ とすれば

$$C = \frac{x_0}{2}\left(1 - \frac{\Gamma}{2\Omega}\right)$$
$$D = \frac{x_0}{2}\left(1 + \frac{\Gamma}{2\Omega}\right)$$

が得られる。これを素直に代入すれば解は得られる。繁雑な式を見てもしょうがないので、グラフだけ示すと (図 4,5)

(b) 初期位置 0 の場合
$x(0) = 0, v(0) = v_0$ とすれば

$$C = -D = \frac{v_0}{2\Omega}$$

位置の変化は、初速度 0 での速度の変化と符号と係数以外は同じになるのでグラフは省略。

3. $R=1$

減衰と振動がつりあったとも言える状態で、"臨界減衰"と呼ばれる。$R<1$ の条件から臨界減衰に近づけることを考えてみると、臨界減衰は振動数が 0 になることに対応している。また、過減衰である $R>1$ の条件から臨界減衰に近づけることを考えれば、臨界減衰はふたつの減衰項の減衰の速さが一致することに対応する。

さて、臨界減衰の条件では上で解いた B の式は

$$B=-\frac{\Gamma}{2}$$

であり、これを用いると解は

$$x(t)=A\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t}$$

となる。これは確かに運動方程式の解ではあるが、初期条件を選ぶための自由度として A しか含まれない。一般解であれば、初期条件で決まる定数を二つ含まなくてはならない。つまり、これは一般解ではなく、なにか特別な条件での解である。実際、この解を使うと

$$x(0)=A$$

$$v(0)=-\frac{\gamma}{2}A=-\frac{\gamma}{2}x(0)$$

であるから、$t=0$ で位置または速度のどちらかを与えると他方は決まってしまう。そういう条件での解なのである。

このままでは一般解が求まらないので、方針を変更して、いきなり $\Gamma/2=\omega_0$ と置かずに、$R<1$ または $R>1$ での解で $R=1$ に近づけた極限を考えることにしよう。

(a) $R<1$ から近づける

上で定義した Ω を 0 に近づければよい。いきなり $\Omega=0$ としてしまってはだめなので、まずは Ω は小さいが有限の大きさを持つものとする。ところで、"小さい"とか"大きい"という言葉は、このままではきちんとした意味を持たない。何と比べて小さいか大きいかという比較対象を指定して初めてきちんとした意味を持つ。[5]解の中で Ω は t との積の形で現れるから[6]、

$$\Omega t\ll 1$$

を考えよう。これは無次元量 (すなわち、ただの"数") を 1 と比較しているので、意味がはっきりしている。このときは、

$$\sin\Omega t\simeq\Omega t$$

$$\cos\Omega t\simeq 1$$

としてよい[7]。これを解に代入すれば

$$x(t)\simeq\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(a\Omega t+b\right)$$

$$v(t)\simeq\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(a\Omega-\frac{\Gamma}{2}(a\Omega t+b)\right)$$

ここで $\Omega=0$ とおいては元の木阿弥なのだが、この時点で初期条件を代入してしまうことにする。$x(0)\equiv x_0$、$v(0)\equiv v_0$ とすると、a,b を x_0,v_0 で表すことができて

$$a\Omega=\frac{\Gamma x_0}{2}+v_0$$

[5]無次元の量を作って、それが 1 に比べて大きいとか小さいとかいう比較にするのが普通

[6]Ωt は無次元の量

[7]この近似は、$t\ll\frac{1}{\Omega}$ であるような t でしか成立しない。つまり、短時間の振る舞いを考えるときにのみ有効な近似である。しかし、最終的には $\Omega\to 0$ の極限をとるので、結果はすべての時間で有効なものになる。

$$b = x_0$$

が得られる。解の中で Ω は必ず $a\Omega$ として現れるから、このまま代入してしまえば

$$x(t) \simeq \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left[x_0 + \left(v_0 + \frac{\Gamma x_0}{2}\right)t\right]$$

ところがこの式はもはや Ω を含まないので、$\Omega \to 0$ の極限でもこのままである。[8]したがって、臨界減衰の解として

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left[x_0 + \left(v_0 + \frac{\Gamma x_0}{2}\right)t\right]$$

$$v(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left[v_0 - \frac{\Gamma}{2}\left(v_0 + \frac{\Gamma x_0}{2}\right)t\right]$$

が得られる。

(b) $R > 1$ から近づける
同様にまず $\Omega t \ll 1$ を考えると

$$\mathrm{e}^{\pm\Omega t} \simeq 1 \pm \Omega t$$

であるから、これを解である $x(t)$ と $v(t)$ の式に代入すると

$$x(t) \simeq \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[(C + D) + (-C + D)\Omega t\right]$$

$$v(t) \simeq \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[-C\left(\frac{\Gamma}{2} + \Omega\right)(1 - \Omega t) - D\left(\frac{\Gamma}{2} - \Omega\right)(1 + \Omega t)\right]$$

これに初期値 $x(0) \equiv x_0$、$v(0) \equiv v_0$ を代入すると

$$C + D = x_0$$

$$(-C + D)\Omega = v_0 + \frac{\Gamma}{2}x_0$$

が得られる。前と同様、解の中に Ω は必ず $(-C + D)\Omega$ として現れるから、このまま代入してしまえば、Ω を含まない解が得られる。それが上の解と同じになることは簡単に確かめられるので省略。

結局、二通りの極限で同じ解が得られる、これが臨界減衰の解である。これもまた、二通りの初期条件を代入してみよう。

(a) 初速度 0 の場合
$x(0) = x_0, v(0) = 0$ を代入するだけなので、グラフだけ示すと (図 6,7)

(b) 初期位置 0 の場合
代入してみればわかるが、位置の変化は初速度 0 のときの速度の変化と符号・係数が違うだけなので、グラフは省略。

[8] $a\Omega$ を $v_0 + \frac{\Gamma x_0}{2}$ に保ったままで $\Omega \to 0$ の極限をとったわけだから、実は同時に $a \to \infty$ としたことになる。

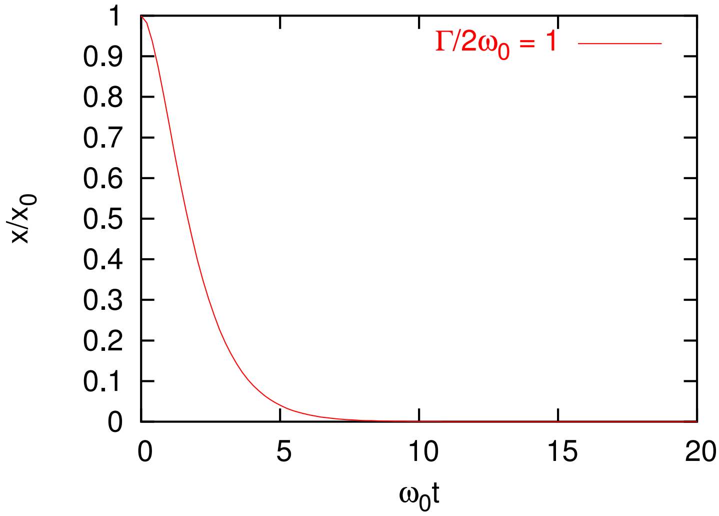

図 6: 臨界減衰での位置の時間変化 (初速度 0)

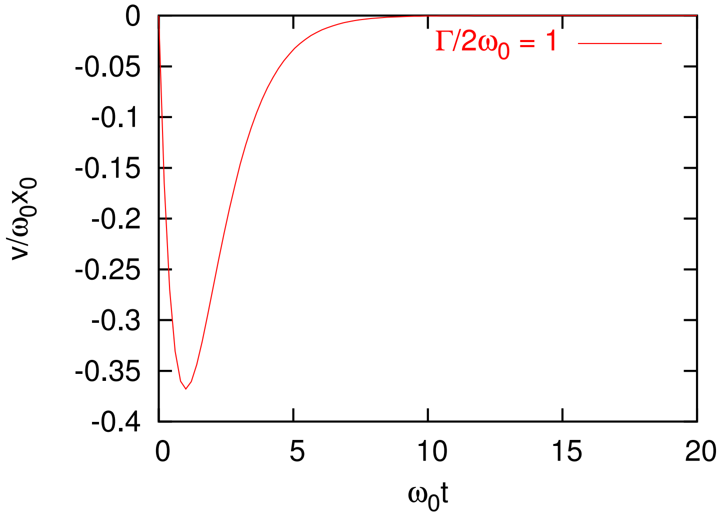

図 7: 臨界減衰での速度の時間変化 (初速度 0)